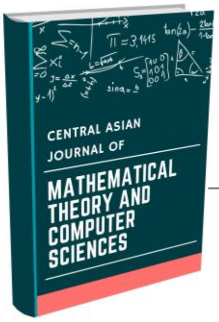

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

http://centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS

02 Issue: 03 | March 2021 **ISSN: 2660-5309**

Начально-Краевая Задача Для Одной Системы Составного Типа

Сраждинов И. Ф.

Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета

Алмалык. Узбекистан.

Email: israjdinov@bk.ru

ABSTRACT

Initial-boundary value problem for one system of composite type. The article presents the initial conditions and shows the solvability of the problem.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 28 February 2021

Revised form 19 March 2021

Accepted 31 March 2021

Key words: initial-boundary value problem, system of equations of component type, Fure series, initial condition, elliptical and hyperbolic types.

---***---

Introduction

Для уравнений и систем составного типа проблема разрешимости смешанной задачи еще изучена не достаточно. Настоящая работа посвящена именно этой задаче. В данном случае под составным типом подразумевается уравнение или система, которая в каждой точке данной области одновременно обладает свойствами, по крайней мере, двух типов (в данном случае эллиптико-гиперболического типов). До сих пор для таких систем при исследовании смешанных задач начальные условия задавались в классическом виде, т.е. как отдельные два уравнения эллиптического и гиперболического типов[1].В данной работе во первых доказывается необходимое и достаточное условие существования общего решения, а также приводится новая постановка начальных условий в смешанных задачах(см.(8) ниже) и в третьих исследуется разрешимость смешанной задачи для данной системы двух уравнений второго порядка составного типа. Используется метод доказательства разрешимости смешанной задачи работы В.А.Ильина [2](см. также [3]) , т.е. разложение искомого решения в ряды по собственным функциям соответствующих операторов, а также доказательство абсолютной и равномерной сходимости данных рядов и рядов полученных в результате однократного и двукратного их дифференцирования. Заметим, что в настоящее время проводятся исследования одного скалярного уравнения составного типа [см.4,5].

Формулировка задачи и основные результаты

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости смешанной задачи для системы двух дифференциальных уравнений составного типа, следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + LU = a\left(LV + V\right) \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - LV = b\left(LU + U\right). \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $U=U(t,x);V=V(t,x)$–вещественные функции переменных $t,x.;\ a\geq 0,b\geq 0,a+b>0$ одновременно не равные нулю, постоянные числа. Пусть

$$LX(x)=\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dX(x)}{dx})-q(x)X(x)=p(x)\frac{d^2X(x)}{dx^2}+p'(x)\frac{dX(x)}{dx}-q(x)X(x) \qquad (2)$$

где $p(x),p'(x),q(x)$-непрерывные функции при $0\leq x\leq 1$, причем $p(x)>0,q(x)\geq 0$.

См [6стр.225] ,[7,стр.464]. Как известно [6,7], при вышеприведенных предположениях собственные значения задачи

$$LX+\lambda^2X=0,\quad X(0)=X(l)=0 \quad (3)$$

положительны, а собственные функции $X_n(x)$ образуют полную ортонормированную систему функций. Система (1) имеет характеристическую форму $\chi(\tau,\xi)=\tau^4-(p^2(x)+ab)\xi^4$ и поэтому является системой составного типа.

Следуя[2,3] разделяем переменные: $U(t,x)=T(t)X(x),\ V(t,x)=\theta(t)X(x)$ принимая во внимание равенство $LX+\lambda^2X=0,$ и исключая одну из неизвестных функций (при $a\neq 0,b\geq 0$ исключаем $\theta(t)$ и при $b\neq 0,a\geq 0$ исключаем $T(t)$), получаем(ниже приведены формулы в случае $a\neq 0,b\geq 0$, которую обозначим через (A), аналогично получаются соответствующие равенства и в случае (B) $a\geq 0,b\neq 0.$).

$$T^{IV}-\left[ab\left(1-\lambda_n^2\right)^2+\lambda_n^4\right]T=0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow k^4-\Lambda(a,b,\lambda_n)=0,$$

где через $\Lambda=\Lambda(a,b,\lambda_n)$ обозначено выражение в квадратной скобке уравнения (4).Различные свойства уравнения (4) с точки зрения механики изучены, например, в [8.стр.251].Краткий литературный обзор по исследованиюсистем составного типа можно найти в [9], а также система составного типа со специальными коэффициентами изучается в [10].

Имеем $k_1=\sqrt[4]{\Lambda},\ k_2=-k_1,\ k_3=ik_1,\ k_4=-ik_1$. Так как k_1 зависит от n, впредь k_1 обозначим через k_n. Как видно $k_n=\sqrt[4]{ab(1-\lambda_n^2)^2+\lambda_n^4}$ (4a)

$$k_n\approx\lambda_n$$

Учитывая это получаем (в случае (A)):

$$T_n(t)=C_1e^{k_nt}+C_2e^{-k_nt}+C_3Cosk_nt+C_4Sink_nt, \qquad (5)$$

$$\theta_n(t)=\frac{1}{a(1-\lambda_n^2)}\left[T_n''(t)-\lambda_n^2T_n(t)\right].$$

$$T_n''(t)=k_n^2(C_1e^{k_nt}+C_2e^{-k_nt})-k_n^2(C_3Cosk_nt+C_4Sink_nt)$$

$$\lambda_n^2T(t)=\lambda_n^2\left[\left(C_1e^{k_nt}+C_2e^{-k_nt}\right)+\left(C_3Cosk_nt+C_4Sink_nt\right)\right]$$

$$\theta_n(t)=\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a\left(1-\lambda_n^2\right)}\left(C_1e^{k_nt}+C_2e^{-k_nt}\right)-\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a\left(1-\lambda_n^2\right)}\left(C_3Cosk_nt+C_4Sink_nt\right)\,(6)$$

Таким образом, можно утвердить следующее: **общее решение системы (1) представляется в виде** $U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x),\ V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)X_n(x)$**, где** $T_n(t),\theta_n(t)$ **даны выражениями (5) и (6) соответственно, а** $X_n(x)$ **собственные функции задачи (3).**

Теперь займемся представлением частного решения

Введем обозначения:

$\alpha_n^{\pm}=\alpha_n^{\pm}(k_n,a,\lambda_n)=\dfrac{k_n^2\pm\lambda_n^2}{a\left(1-\lambda_n^2\right)}$ (при $a\neq 0$) и $\beta_n^{\pm}=\beta_n^{\pm}(k_n,b,\lambda_n)=\dfrac{k_n^2\pm\lambda_n^2}{b\left(1-\lambda_n^2\right)}$. (при $b\neq 0$).

Как видно, при достаточно больших n, $\alpha_n^{\pm}\approx const$ ($\beta_n^{\pm}\approx const$)

$$\frac{\alpha_n^{\pm}}{\alpha_n^{\pm}+\alpha_n^{\pm}}=\frac{k_n^2\pm\lambda_n^2}{2k_n^2}\approx const\quad \alpha_n^{+}-\alpha_n^{-}=\frac{2\lambda_n^2}{a\left(1-\lambda_n^2\right)}\approx const\ \alpha_m^{+}+\alpha_m^{-}=\frac{2k_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}\approx const$$

Далее, для $T_n(0),\theta_n(0)$ и их производных первого порядка получаем систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1,C_2,C_3,C_4.

$$\begin{cases} T_n(0)=C_1+C_2+C_3,\\ T_n'(0)=k_nC_1-k_nC_2+C_4,\\ \theta_n(0)=\alpha_n^-C_1+\alpha_n^-C_2-\alpha_n^+C_3,\\ \theta_n'(0)=k_n\alpha_n^-C_1-k_n\alpha_n^-C_2-k_n\alpha_n^+C_4,\end{cases}\quad (A)\qquad \begin{cases} \theta_n(0)=C_1+C_2+C_3,\\ \theta_n'(0)=k_nC_1-k_nC_2+k_nC_{4,}\\ T_n(0)=\beta_n^-C_1+\beta_n^-C_1-\beta_n^+C_3,\\ T_n'(0)=k_n\beta_n^-C_1-k_n\beta_n^-C_2+k_n\beta_n^+C_4.\end{cases}\quad (B)$$

Заметим, что детерминанты этих систем, соответственно, равны $\dfrac{8k_n^6}{a^2(1-\lambda_n^2)^2}$ при $a\neq 0$ $\dfrac{8k_n^6}{b^2(1-\lambda_n^2)^2}$ при $b\neq 0$.Следовательно, если a и b одновременно равны нулю детерминанты систем (A) и (B) не существуют. Решая систему (A)получаем:

$$C_1=\frac{a(1-\lambda_n^2)}{4k_n^2}\left[\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}\left(T_n(0)+\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)+\left(\theta_n(0)+\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right],$$

$$C_2 = \frac{a(1-\lambda_n^2)}{4k_n^2}\left[\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}\left(T_n(0)-\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)+\left(\theta(0)-\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right], \qquad (7)$$

$$C_3 = \frac{a(1-\lambda_n^2)}{2k_n^2}\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}T_n(0)-\theta_n(0)\right)$$

$$C_4 = \frac{a(1-\lambda_n^2)}{2k_n^2}\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}(\frac{1}{k_n}T_n'(0))-(\frac{1}{k_n}\theta_n'(0))\right).$$

аналогичные равенства получаются и для случая (B).

Таким образом, полученные результаты можно подытожить в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА1: Р***ешение, выражаемое через начальные данные и их производные первого порядка (неограниченное по*** t, ***при*** $t\to\infty$***) системы (1) представляется в виде рядов***

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)\ , \quad V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)X_n(x)$$

где $T_n(t)$, $\theta_n(t)$ ***даны равенствами (5) и (6)и*** $X_n(x)$***-собственные функции задачи (3) , а коэффициенты*** C_1,C_2,C_3,C_4 ***представлены равенствами (7).***

Отметим,что данное (неограниченное по t при $t\to\infty$) решение можно использовать для определения решения при $0\le t\le t_0$.

Пусть $D=\{(t,x):0\le x\le l, t>0\}$ и $r=0,1;\ j=0,1.$

ЗАДАЧА $S_{rj}(D)$. *Найти ограниченное по* t *при* $t\to\infty$ *решение системы (1) в области D удовлетворяющий следующим начальным*

$$\begin{cases} rU(0,x)+(1-r)U'(0,x)=\varphi(x), \\ jV(0,x)+(1-j)V'(0,x)=\psi(x) \end{cases} (8)$$

и граничным условиям

$U(t,0)=U(t,l)=V(t,0)=V(t,l)=0$ (9)

Следовательно, имеем задачи $S_{11}(D); S_{10}(D); S_{01}(D); S_{00}(D)$.

Заметим, что ограниченность решения обеспечивается следующими равенствами (см.(7)):

$$\left[\frac{\partial T_n}{\partial t}(0)+k_nT_n(0)\right]=0,\quad \left[\frac{\partial \theta_n}{\partial t}(0)+k_n\theta_n(0)\right]=0 \qquad (10)$$

Принимаяво внимание (10) для задачи $S_{11}(D)$ получаем:

$$C_2=\frac{a(1-\lambda_n^2)}{2k_n^2}\left(\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}T_n(0)+\theta_n(0)\right),C_3=-C_4=\frac{a(1-\lambda_n^2)}{2k_n^2}\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}T_n(0)-\theta_n(0)\right),C_2+C_3=T_n(0)$$

$$\alpha_n^-C_2-\alpha_n^+C_3=\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}\left(\frac{a(1-\lambda_n^2)}{2k_n^2}\left(\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}T_n(0)+\theta_n(0)\right)\right)-\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}\left(\frac{a(1-\lambda_n^2)}{2k_n^2}\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a(1-\lambda_n^2)}T_n(0)-\theta_n(0)\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2k_n^2a(1-\lambda_n^2)}-\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2k_n^2a(1-\lambda_n^2)}\right)T_n(0)+\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}+\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}\right)\theta_n(0)=\theta_n(0)$$

Следовательно, решение задачи $S_{11}(D)$ представим в виде:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(C_2e^{-k_nt}\right)+C_3\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x) \tag{11}$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\alpha_n^-C_2e^{-k_nt}\right)-\alpha_n^+C_3\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x).$$

Принимая во внимание равенства $C_2+C_3=T_n(0),\ \alpha_n^-C_2-\alpha_n^+C_3=\theta_n(0)$ получаем $U(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=\varphi(x)$ и $V(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(0)X_n(x)=\psi(x)$, т.е. $T_n(0)$ и $\theta_n(0)$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (см.8) соответственно.

Обозначим через $C_0^{k+\nu}[0;l]$ $(0<\upsilon<1)$ класс функций обладающих непрерывными производными $k-$того и кусочно-непрерывными $k+1-$го порядка при $0\le x\le l$ и равные нулю на концах данного отрезка вместе с производными $k=2m$- (четно)го порядка, $2m\le k$.

ТЕОРЕМА2:*Пусть функции* $\varphi(x)\in C_0^{3+\nu}[0;l]$ ***и*** $\psi(x)\in C_0^{3+\upsilon}[0,l]$***.Тогда ряды (11) удовлетворяют системе уравнений (1), начальным условиям (8)-(*** $S_{11}(D)$ ***) и граничным условиям (9).При этом возможно, ряды (11), дифференцировать по*** x ***и*** t ***до двух раз и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.***

Для доказательства абсолютной и равномерной сходимости продифференцированных рядов, достаточно доказать сходимость следующего мажорантного ряда:

$$\sum_{n>N}k_n^2\left(|C_2(n)|+|C_3(n)|\right)$$

Очевидно, k_n^2 с точностью до постоянного множителя ведет себя эквивалентно λ_n^2 (см.(4a)). Следовательно, $|C_2(n)|+|C_3(n)|$ должны обеспечить поведение, как $\lambda_n^{-3-\upsilon}, 0<\upsilon<1$.Как видно из выражений C_2,C_3 для обеспечения требуемого поведения, от функции $\varphi(x),\psi(x)$ мы должны потребовать существования непрерывных производных третьего порядка, а производная четвертого порядка может быть кусочно-непрерывными кроме того $\varphi^{(m)}(0)=\varphi^{(m)}(l)=\psi^{(m)}(0)=\psi^{(m)}(l)=0; m=0,2.$

Аналогично, для задачи S_{10} имеем (с учетом равенств (10)):

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{(\alpha_n^+ + \alpha_n^-)}\left[\alpha_n^+\left(T_n(0)\right) - \left(\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right],$$

$$C_3 = \frac{1}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left(\alpha_n^- T_n(0) + \left(\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right)$$

$$C_4 = -C_3 = -\frac{1}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left(\alpha_n^-(T_n(0)) + (\frac{1}{k_n}\theta_n'(0))\right),$$

и следовательно получаем решение в виде:

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left[\left(\alpha_n^+ T_n(0) - \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)e^{-k_n t} + \left(\alpha_n^- T_n(0) + \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\right]X_n(x)$$

(12)

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\ \frac{\alpha_n^-}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left(\alpha_n^+ T_n(0) - \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)e^{-k_n t} - \frac{\alpha_n^+}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left(\alpha_m^- T_n(0) + \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\ \} X_n(x)$$

Очевидно, как и в предыдущих случаях (с учетом (10)).

$$C_2 + C_3 = T_n(0),\ \alpha_n^- C_2 - \alpha_n^+ C_3 = \theta_n(0)$$

ТЕОРЕМА3:*Пусть функции* $\varphi(x), \psi(x) \in C_0^{3+\alpha}(\Omega)$. ***Тогда ряды (12) удовлетворяют системе уравнений (1), начальным условиям (8)-*** $S_{10}(D)$ ***и граничным условиям (9). При этом возможно ряды (12) дифференцировать по*** x ***и*** t ***до двух раз и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.***

Приведем формулы представляющие решение задачи S_{01}

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left[\left(\theta_n(0) - \alpha_n^+(\frac{1}{k_1}T_n'(0))\right)e^{-k_1 t} - \left(\left[\theta_n(0) + \alpha_n^-(\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]\right)\left(Cosk_1 t - Sink_1 t\right)\right]X_n(x)$$

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\ \frac{\alpha_n^-}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left(\alpha_n^+ T_n(0) - \frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right)e^{-k_1 t} - \frac{\alpha_n^+}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left(\alpha_n^+ T_n(0) + \frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right)\left(Cosk_1 t - Sink_1 t\right)\ \} X_n(x)$$

Аналогично предыдущему доказываются соответствующие теоремы задач S_{01}, S_{00} .Для задачи S_{00} получаем:.

$$C_2 = -\frac{1}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left[\left(\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right) + \alpha_n^+\left(\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right)\right], \quad C_3 = \frac{1}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left[\left(\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right) - \alpha_n^-\left(\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right)\right]$$

$$C_4 = \frac{1}{\alpha_n^+ + \alpha_n^-}\left[\alpha_n^-\left(\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right) - \left(\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right)\right].$$

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(C_2 e^{-k_1 t}\right) + \left(C_3(Cosk_1 t - Sink_1 t)\right)\right]X_n(x)$$

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n^-\left(C_2 e^{-k\,t}\right) - \alpha_n^+ C_3\left(Cosk_1 t - Sink_1 t\right)\right]X_n(x)$$

Выражаю благодарность академику Ш.А.Алимову завнимательное обсуждение и ценные замечания, благодаря которым появились работы [11-13] и настоящая работа.

Литература:

1.Джураев А.Д. Методы сингулярных интегральных уравнений. Москва. Наука. 1987г. 415 стр.
2.Ильин В.А. Успехи математических наук, 1960,т. 15, вып.2(92),стр.97-154.
3.Алимов Ш.А. Избранные научные труды, 2015, Ташкент, Meriyus, 286 стр
4.Зикиров О.С.Вестник ЮУрГУ, Серия “Матем. Механ. Физ.”, 2016, том8,N2, стр.19-26
5.КожановА.И. Известия Иркутского гос. ун., Серия Математика, 2019, стр.120-127.
6.Смирнов В.И.Курс высшей математики, том 4,часть 2, Москва, Наука, 1981, 550стр.
7.Владимиров В.С.Уравнения математической физики, Москва, Наука, 1981, 511стр.
8.Карман Т. И БиоМ. Математические методы в инженерном деле. ОГИЗ.Гос.изд.тех-теор. литер. Москва. 1948. 423 стр.
9.Сраждинов И.Ф. «О разрешимости смешанных задач для систем составного типа ».Uzbek mathematical journal,2010,N 3,стр.121-130
10.Сраждинов И.Ф.Доклады Академии наук Республики Узбекистан, 2016, N5, стр. 7-10.
11.Сраждинов И.Ф.Международная науч. конф “Совр. проблемы дифф.ур. и смежных разделов математики”. Фергана,ФГУ,12-13 марта 2020 .стр.145-149.
12.Сраждинов И.Ф. Разрешимость начально-краевой задачи для одной системы составного типа. Москва. 2020. Межвуз. науч. конгресс. Изд-во Инфинити. Том2. стр.145-152. DOI 37.10.34660/INF.2019.62.47001.
13.Сраждинов И.Ф.О разрешимости смешанной задачи для одной …Республ. науч. конф.”Совр. методы мат.физ.и их прилож.”,Ташкент,17-18 ноября 2020, том1, стр.264-269; там же 269-274