

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Бурнашев Владимир Фитратович, Бустанов Худайкул Абрийевич
СамГУ, г. Самарканд, Узбекистан

Аннотация

Математическая модель, используемая в данной модели, записана в виде системы, состоящей из эллиптического уравнения давления и гиперболического уравнения насыщения. Получены численное решение этой модели, комбинируя методы конечных элементов и конечного объёма с процедурой неосцилляторной реконструкции второго порядка для построения значений скоростей на границах ячеек сетки FV из точечных значений давления в узлах КЭ. Численные результаты сравниваются с результатами, полученными с использованием коммерческого кода *ECLIPSE*, демонстрирующего соответствующее поведение с качественной точки зрения.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 14 Nov 2023

Revised form 15 Dec 2023

Accepted 12 Jan 2024

Ключевые слова:

Модель, моделирование,
фильтрация, сжимаемость,
пористость, среда, нефть,
флюид, плавучесть,
насыщенность, симуляция,
завихрения, давления.

© 2024 Hosting by Central Asian Studies. All rights reserved.

Введение

Конкретный контекст данной работы лежит в области математического и численного моделирования подземного течения водонефтяных систем. При этом движущийся флюид обычно формируется смесью нефти, воды и газа, движущейся через пористую среду за счёт существующей связанной сети пор в геологической среде. Наиболее распространённые математические модели, которые представляют такого рода задачи, задаются системой параболических дифференциальных уравнений в частных производных, где неизвестными являются давление и насыщенность различных фаз, участвующих в процессе, а именно моделью Блэка-Ойла [1]. Многие инструменты моделирования, используемые для получения решения математических моделей, используют методы конечных разностей, см. [4], или методы конечных элементов. Другие формулировки, основанные на методах конечных объёмов и комбинациях методов конечных элементов и конечных объёмов, также доступны в литературе [2]. В этой модели исследованы стратегии, см. [3, 6], где параболическая система УЧП преобразуется в систему, образованную эллиптическим уравнением для давления и гиперболическим уравнением для насыщения. Последнее уравнение аналогично известному уравнению Бакли-Левретта (впервые введено в [8]). Теоретический анализ такой постановки был развит в [7]. Интересная работа в данном исследовании соответствует трактовке двухфазной модели на основе преобразования в эллиптико-гиперболическую систему, развивающей как аналитическое

исследование, так и численное решение [7]. Также в [7] выполнено численное решение упрощённой модели. В [9] авторы доказывают локальное существование и единственность классического решения для исходной гипербола-эллиптической системы, возникающей при моделировании процессов добычи нефти, с помощью теоремы Арцела-Асколи. Другим важным вкладом, касающимся существования и единственности решения в моделях фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде, является работа [2].

Эллиптическое уравнение (давления) и гиперболическое уравнение (насыщения) связаны через насыщение, которое входит в них обоих, точнее, в коэффициенты подвижности. Разработанная в данной модели численная схема состоит из решения уравнения давления (эллиптическая часть модели) методом конечных элементов и решения уравнения насыщения (гиперболическая часть) по схеме конечного объёма.

В данной модели получено решение для давления в узлах, в которых дискретизирована область, и далее эти узлы рассматриваются как межъячеечные границы для схемы конечного объёма.

Приведены результаты для однофазного случая, в котором рассматривается параболическое уравнение для давления, а также приведены результаты для давления и насыщения для двухфазного случая. Значения параметров реалистичны и взяты из коммерческого кода ECLIPSE [5] компании Schlumberger. Полученные результаты сравниваются с данными ECLIPSE. В двухфазном случае проводится качественное сравнение с результатами, полученными при использовании ECLIPSE.

В соответствии с параметром вводится набор физических переменных, характеризующих упругую пористую среду, насыщенную сжимаемой жидкостью. Течение жидкости в пористой среде можно рассматривать как смесь двух фаз, в которой каждая фаза (жидкая и упругая пористая) может характеризоваться своими параметрами состояния. Отметим, что здесь рассматриваются процессы, в которых изменения температуры пренебрежимо малы, и рассматриваем изэнтропическое приближение модели.

Характеризуем элемент смеси следующими параметрами состояния:

α_1 — объёмная доля упругой среды; ρ — массовая плотность смеси;

c_1 — массовая доля упругой среды;

u_i — скорость смеси;

w_i — относительная скорость движения упругой пористой среды по отношению к жидкости; F_{ij} — градиент упругой деформации смеси.

Объёмную и массовую доли жидкости можно рассчитать, как $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, $c_2 = 1 - c_1$ соответственно. Параметры, характеризующие состояние смеси, связаны с параметрами состояния фаз соотношениями:

$$\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2, \quad c_1 = \alpha_1 \rho_1 / \rho, \quad c_2 = \alpha_2 \rho_2 / \rho, \quad u^i = c_1 u_1^i + c_2 u_2^i, \quad w^i = u_1^i - u_2^i,$$

где ρ_1, ρ_2 — массовые плотности упругой пористой среды и жидкости; u_1^i, u_2^i — их скорости.

Здесь представлена модель двумерных тестовых задач с целью верификации модели. Поскольку определяющие уравнения образуют гиперболическую систему законов сохранения, стандартный численный метод WENO–Рунге–Кутты [7] может быть непосредственно применён для решения двумерной версии уравнений. Двумерная версия системы уравнений состоит из 11 уравнений, которые формально можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial x_2} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}),$$

где U — вектор консервативных переменных, $F(U)$, $G(U)$ — потоки и $Q(U)$ — вектор исходных членов. Применение метода WENO–Рунге–Кутты третьего порядка по пространству и пятого порядка по пространству для решения начальной задачи для представленной модели можно найти в [2]. Ниже мы применяем тот же метод для начально-краевой задачи. Для оценки потока в межъячейках мы используем поток Лакса–Вендроффа, тогда как для оценки потока на границе используется характеристическое разложение и линеаризованные граничные условия. Обратите внимание, что здесь применяется мгновенная релаксация давления, предполагая, что характерный масштаб порового пространства мал. Численная обработка мгновенной релаксации давления заключается в корректировке объёмной доли фаз α_1 и плотностей ρ_1 , ρ_2 путём решения алгебраического уравнения $p_1 = p_2$ в конце каждого временного шага на каждой ячейке сетки.

Уравнение состояния идеального газа:

$$p \cdot V_M = R \cdot T, \text{ где}$$

p — давление,

V_M — молярный объём,

R — универсальная газовая постоянная

T — абсолютная температура, К.

В статье имеется дело с двухфазной моделью в одном пространственном измерении, полезной в области моделирования пласта и добычи нефти. В модели нефть и вода являются единственными активными фазами в коллекторе. Целью этой модели является описание несмешивающегося вытеснения нефти, которая будет двигаться к добывающей скважине под действием закачки воды в пласт. Нефть и вода не смешиваются друг с другом.

Для симуляции жидкостей важно сделать расчёты настолько быстрыми, насколько это возможно, при этом не теряя точности. В связи с этим требуется выбрать максимально большой временной интервал, который будет не настолько большим, чтобы «испортить» симуляцию. Обычно это делается с помощью критерия Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ, англ. Courant–Friedrichs–Lewy condition, CFL), согласно которому нужно выбирать интервал времени Δt так, чтобы частица жидкости за время Δt не продвинулась больше, чем на один пространственный шаг сетки Δh :

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{\vec{u}_{max}},$$

где $\vec{u}_{max}$ — максимальная скорость в поле скоростей.

Одна из формул для расчёта $\vec{u}_{max}$ выглядит как [2]:

$$\vec{u}_{max} = \max(|\vec{u}|) + \sqrt{\Delta h |\vec{F}|},$$

где $\max(|\vec{u}|)$ — наибольшее значение скорости в сетке по модулю, а $\vec{F}$ — силы, применяемые к жидкости.

Все вычисления производятся на трёхмерной сетке:

$$\mathcal{V} = \{0, \dots, \mathcal{N}_x - 1\} \times \{0, \dots, \mathcal{N}_y - 1\} \times \{0, \dots, \mathcal{N}_z - 1\}$$

$\mathcal{N}_x$, $\mathcal{N}_y$, $\mathcal{N}_z$ — размеры сетки по соответствующим осям. Вершины $v \in \mathcal{V}$ хранят значения волновой функции $\psi_v \in \mathbb{C}^2$, давления $q_v \in \mathbb{R}$, дивергенции $\xi_v \in \mathbb{R}$. В алгоритме используется дискретная скорость как вес направленных ребер сетки $vw \in \mathcal{E}$:

$$\eta_{vw} = \hbar \arg \langle \psi_v, \psi_w \rangle_{\mathbb{C}},$$

которая хранится в шахматном порядке в вершинах сетки.

Дискретная дивергенция выражается через формулу:

$$\xi_v = \frac{1}{V_v} \sum_{vw \in \mathcal{E}} \frac{A_{vw}}{l_{vw}} \eta_{vw},$$

где A_{vw} – удвоенная площадь грани, l_{vw} – длина ребра сетки, V_v – удвоенный объем ячейки.

Математическое описание начальных и граничных условий

Ниже представлен базовый алгоритм сжимаемого потока жидкости в пористой среде – начальное условие.

Вход: $\psi^{(0)}$, dt , $\hbar$ // начальное состояние и параметры

Для $j \leftarrow 0, 1, 2, \dots$

$$\psi^{\text{врем}} \leftarrow \text{Schrödinger}(\psi^{(j)}, dt, \hbar)$$

$$\psi^{\text{врем}} \leftarrow \frac{\psi^{\text{врем}}}{|\psi^{\text{врем}}|} \text{ // нормализация}$$

$$\psi^{(j+1)} \leftarrow \text{PressureProject}(\psi^{\text{врем}})$$

В данной функции производится приведение матрицы (сетки) к диагональному виду. Для этого используется БПФ (для значений на гранях сетки - ДКТ).

В данном случае λ_v – собственные значения трехмерного непрерывного оператора Лапласа, что является граничащим условием.

Функция $\text{Schrödinger}(\psi, dt, \hbar)$

$$\hat{\psi} \leftarrow \text{FFT3D}(\psi)$$

$$\hat{\psi} \leftarrow e^{i\lambda dt \frac{\hbar}{2}} \hat{\psi}$$

Вернуть $\text{InvFFT3D}(\hat{\psi})$

Математическое описание уравнения для давления

Составим математическое описание уравнения для давления.

Давление может сказываться на сжимаемой жидкости в трёх состояниях:

1. Состояние «0»: давление на жидкость не проявляется;
2. Состояние «1»: давление начинает сжимать жидкость.
3. Состояние «2»: давление сжало жидкость до ее физического предела.
4. Состояние «3»: давление прекращает воздействовать на жидкость.

Тогда с учётом состояний: $P_0(0) = 1; P_1(0) = P_2(0) = 0$. Математическое описание уравнения давления будет выглядеть следующим образом:

$$P_0(1) = 1 - q_\Sigma; P_1(1) = q_1; P_2(1) = q_2; P_3(1) = 0,$$

$$P_0(2) = (1 - q_\Sigma)^2 + q_1 R_1 + q_2 R_2; P_1(2) = (1 - q_\Sigma) q_1;$$

$$P_2(2) = (1 - q_\Sigma) q_2; P_3(1) = q_1 \overline{R_{13}} + q_2 \overline{R_{23}}$$

В данной функции реализован расчёт давления сжимаемой жидкости как внутри, так и на стенке ограничивающего объёма. Эта часть алгоритма реализована с точки зрения волновых функций (в отличие от оригинального метода, где обычно используется прямой метод Эйлера).

Функция $\text{PressureProject}(\psi)$

Для всех $vw \in \mathcal{E}$

$$\tilde{\eta}_{vw} = \arg\langle \psi_v, \psi_w \rangle_c$$

Для всех $v \in \mathcal{V}$

$$\xi_v = \frac{1}{V_v} \sum_{vw \in \mathcal{E}} \frac{A_{vw}}{l_{vw}} \tilde{\eta}_{vw}$$

$$\hat{\xi} \leftarrow FFT3D(\xi)$$

$$\hat{\xi} \leftarrow \hat{\xi} \begin{cases} \tilde{\lambda}^{-1}, & \text{if } \tilde{\lambda} \neq 0 \\ 0, & \text{if } \tilde{\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$q \leftarrow InvFFT3D(\hat{\xi})$$

Вернуть $e^{-iq} \psi$ //калибровочное преобразование

В данном случае используется уже собственные значения дискретного оператора Лапласа.

Численная схема

В уравнении используются локальные калибровочные преобразования, которые не являются инвариантными – в разных точках пространства функция может изменяться на разные фазы. Восстановление инвариантности требует введения некоторого нового физического поля. Таким образом, симметричность волновой функции сохраняется [9].

Анализ данных и результатов вычислительных экспериментов

Решение в виртуальной среде состоит из двух проектов. Проект Ecosystem содержит подключённые к проекту библиотеки. Класс *DEC* содержит методы для вычислений в системе *DEC*, в классе *ISF* определены основные функции для симуляции двухфазной сжимаемой жидкости в пористой среде. *CxCubeVec* и *CubeVec* – переопределения для вектора трехмерных массивов (причем *CxCubeVec* содержит комплексные числа). Класс *Trackball* реализует часть функционала библиотеки *Rez*.

В визуализаторе VisualStudio есть возможность изменять некоторые свойства жидкости и особенностей реализации, которые можно увидеть на рис. 11. В частности, это плавучесть (Liquidbuoyancy), вес (Liquidweight), временной интервал для отрисовки (Timestep), размер ячейки сетки (Cellsize), наличие препятствия (Obstacleexists).

Выбор значений для уравнений состояний экспериментов

Модель	Вязкость η_1	Давление R_1	Насыщенность $\overline{R_1}$
Базовое состояние	21.7%	30%	70%
С модификацией по вязкости (эксперимент 1)	21.7%	40%	60%
С модификацией по давлению (эксперимент 2)	21.7%	50%	50%
С модификацией по насыщенности (эксперимент 3)	21.7%	60%	40%

В программе реализовано одно препятствие – сфера, находящаяся под источником сжимаемой жидкости. При симуляции с препятствием двухфазная жидкость «стекает» по сферическому препятствию (рис. 1).

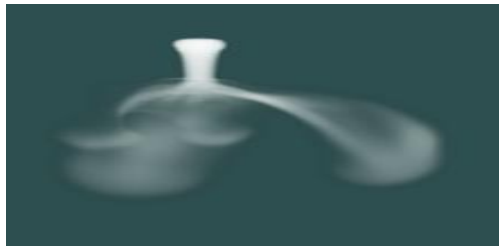


Рис.1 - Симуляция двухфазной сжимаемой жидкости в пористой среде с препятствием

От плавучести зависит форма потока – образуются ли завихрения. Разницу можно увидеть на рис. 2.



а)



б)

Рис. 2 - Симуляция сжимаемой жидкости в пористой среде при увеличенном (а) и уменьшенном (б) значении плавучести

При увеличении веса (плотности) сжимаемой жидкости в пористой среде в симуляции можно заметить, что скорость «падения» сжимаемой жидкости в пористой среде и форма потока зависят от веса вещества (рис. 3).



Рис. 3 - Симуляция сжимаемой жидкости в пористой среде с увеличенным весом

Симулируемая жидкость находится в ограниченном объеме – прозрачном кубе фиксированного объема. При столкновении с прозрачными стенками можно наблюдать, как двухфазная жидкость поднимается по стенкам (рис. 4).



Рис. 4 - Взаимодействие жидкости (сжимаемой жидкости в пористой среде) со стенками описывающего куба

Эксперимент демонстрирует рост степени сжатия двухфазной жидкости в пористой среде по мере роста внешнего воздействия.

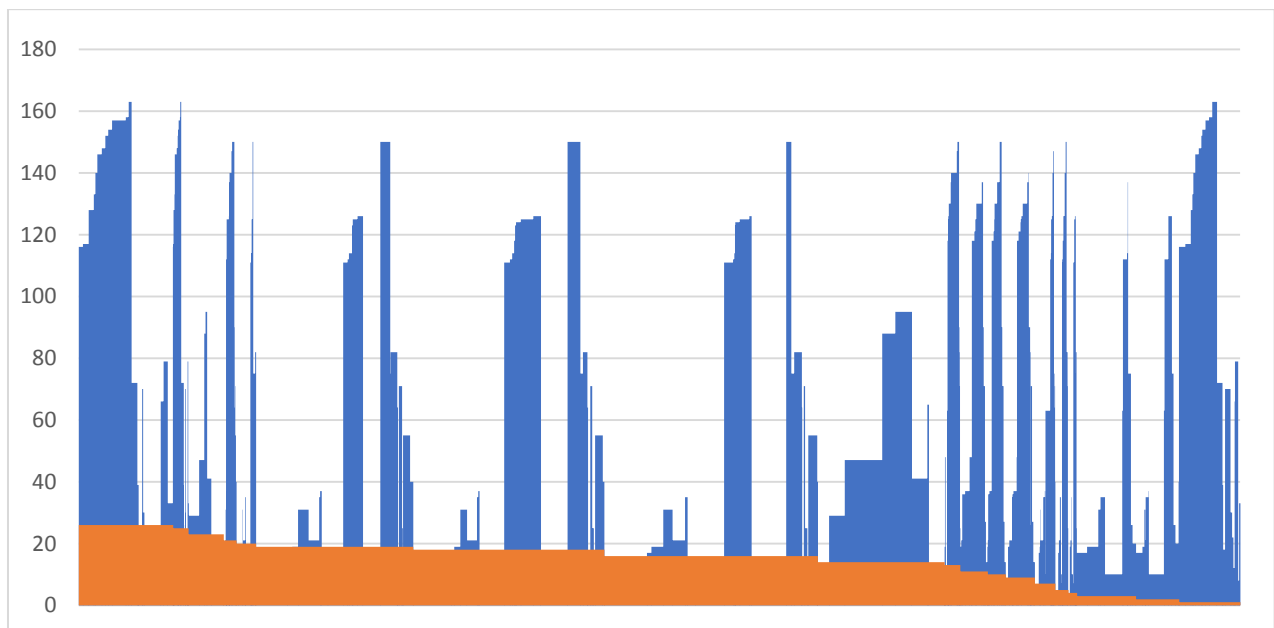


Рис. 5–График роста степени сжатия по мере нарастания давления на сжимаемую жидкость

Анализ моделирования показал, что сжимаемая жидкость в пористой среде с ростом давления окружающей среды уплотняется по вязкости и насыщенности.

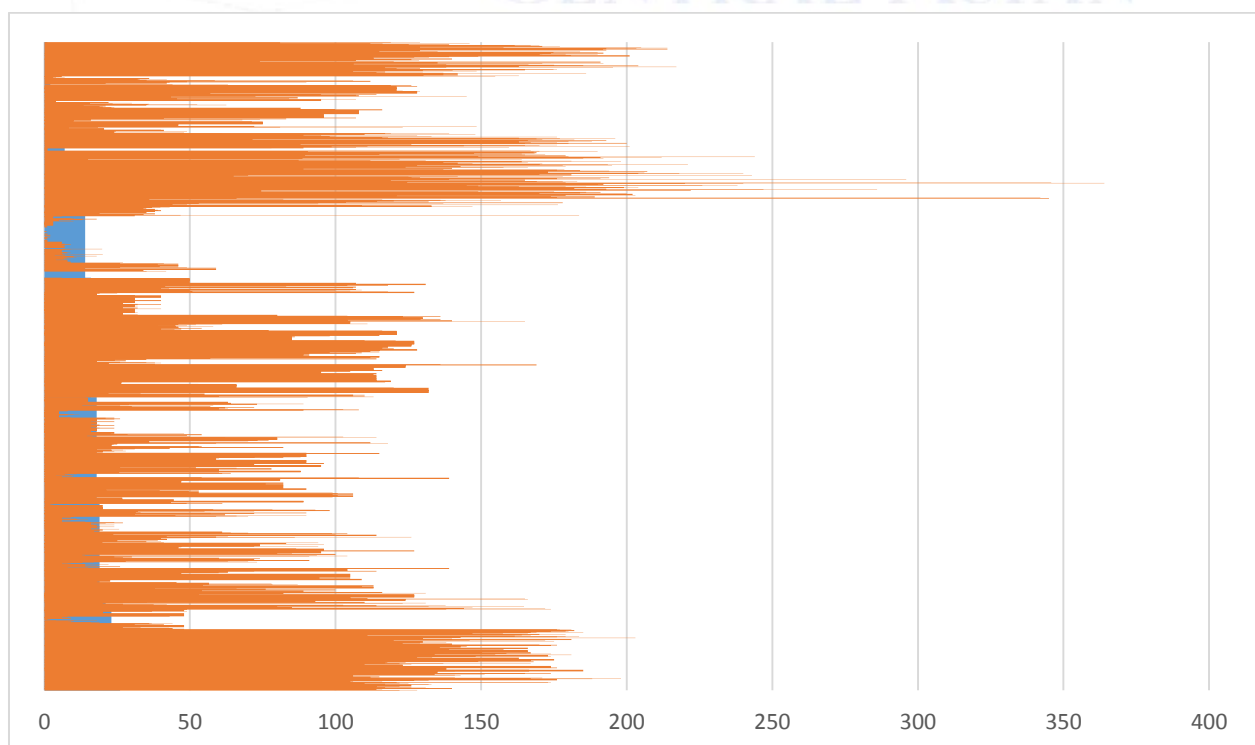


Рис. 6 –График роста степени вязкости по мере нарастания давления на сжимаемую жидкость

Анализ моделирования показал, что с увеличением вязкости становится насыщенной и пластичной; а с ростом вязкости утрачивает некоторую степень сжимаемости.

Таким образом, результатом моделирования являются параметры поведения двухфазной сжимаемой жидкости в пористой среде, которые могут быть использованы при строительстве машин и механизмов для работы в моделируемых условиях.

Заключение

Разработанная модель двухфазного течения в пористой среде описывает происходящие гидравлические явления и взаимодействия фаз. Кроме того, модель является наиболее гибкой, поскольку она использует отдельные уравнения сохранения для каждой фазы как в сети трещин, так и в матричной сети.

Более того, формулировка определяющих и замыкающих соотношений для двух жидкостной модели находится на вполне приемлемом уровне. Подробно рассмотрены основные проблемы моделирования различных условий межфазного переноса. Межфазная передача массы и количества движения пропорциональна межфазной площади и движущей силе.

Литература

1. B. Adrianov, C. Canc`es; *Vanishing capillarity solutions of buckley-leverett equation with gravity in two-rocks medium*, Computational Geosciences 17(3) (2013), no. 4, 551–572 (eng).
2. T. Ahmed; *Reservoir engineering handbook, fourth edition*, Gulf Professional Publishing, 2010.
3. S. N. Antontsev A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov; *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 22, North-Holland, 1990.
4. J. Bear; *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Civil and Mechanical Engineering Series, Dover, 1988.
5. S. E. Buckley, M. C. Leverett; *Mechanism of fluid displacements in sands.*, Transactions of the AIME 146 (1942), 107–116.
6. H. Friis and S. Evje; *Numerical treatment of two-phase flow in capillary heterogeneous porous media by finite-volume approximations*, Int. J. Numer. Anal. Mod. 9 (2012), no. 3, 505–528.
7. S. Mishra G. Coclite, K. Karlsen, N. Risebro; *A hyperbolic-elliptic model of two-phase flow in porous media-existence of entropy solutions.*, Int. J. Numer. Anal. Mod. 9 (2012), no. 3, 562–583.
8. Зяблицкая Ю. А. Анализ и интерпретация гидродинамических исследований для двухфазного потока (вода-нефть) // Известия ТПУ. 2010. №1.
9. A. Schroll, A. Tveito; *Local existence and stability for a hyperbolic-elliptic system modeling two-phase reservoir flow*, Electron. J. Differential Equations 2000 (2000), no. 4, 1–28 (eng).