CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

https://cajmtcs.centralasianstudies.org

Volume: 04 Issue: 12 | Nov 2023 **ISSN: 2660-5309**

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СКЛЕЙКИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

У.Х.Дусанова [1], ***М.С.Даминова*** [2], ***М.К.Эсонтурдиева*** [3]

Каршинский государственный университет [1,2,3]

Аннотация

Данная работа посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для нагруженного уравнения парабол-гиперболического типа, включающего оператор Капуто дробного порядка. Единственность поставленной задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – методом интегральных уравнений.

ARTICLE INFO

Article history:
Received 5 Oct 2023
Revised form 10 Nov 2023
Accepted 20 Dec 2023

Ключевые слова:
Нагруженное уравнение, уравнение параболо-гиперболического типа, оператор дробного порядка в смысле Капуто, интегральное условие склеивания, единственность и существование решения.

---***---

Введение

Применение теории дробного интегрирования и дифференцирования в дробных электрических сопротивлениях биологических элементов, в дробном управлении диффузионными системами, в управлении движением, для анализа сигналов, используемых в робототехнике, динамических системах и управлении механическими манипуляторами, можно найти в работах А.А. Килбаса, Х. М. Шриваставы, Дж. Дж. Трухильо [1], К. С. Миллер и Б. Росс [2], И. Подлубный [3], С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричив [4] Краевые задачи для уравнений параболического и смешанного типов, исключающие дробные интегро-дифференциальные операторы, такие как Капуто и Риман-Лиувилль, были исследованы в работах [5-9]. Первые фундаментальные исследования теории нагруженных уравнений принадлежат А.М.Нахушеву [10-11]. В этих работах дается наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация нагруженных уравнений: нагруженные дифференциальные, интегральные, интегро дифференциальные, функциональные уравнения, а также их многочисленные приложения. За этими исследованиями последовали работы [12-17], в которых были получены интересные результаты. С другой стороны, нам необходимо отметить работы [18-20], в которых методом отдельных переменных было исследовано несколько локальных и нелокальных начально-краевых задач для нагруженных уравнений в прямоугольных областях.

Вышеприведенные публикации привели к выводу, что исследования в области теории нагруженных дифференциальных уравнений дробного порядка актуальны, и эта теория является одной из современных и развивающихся теорий PDE. Однако краевые задачи с интегральным условием склеивания для уравнений со смешанной нагрузкой дробного порядка еще недостаточно изучены. Следует отметить работы [21], [22]. Данная статья посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, включающего оператор Капуто дробного порядка.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_{C}D_{0y}^{\alpha}u+p(x,y)\int\limits_{x}^{1}(t-x)^{\beta-1}u_t(t,0)dt, \ at\ y\ge 0, \\ u_{xx}-u_{yy}-q(x+y)\int\limits_{x+y}^{1}(t-x-y)^{\gamma-1}u_t(t,0)dt, \ at\ y\le 0, \end{cases} \tag{1}$$

С оператром Капутю:

$${}_{C}D_{0y}^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{y}(y-t)^{-\alpha}f'(t)dt, \tag{2}$$

где $0<\alpha,\beta,\gamma<1;$ $p(x,y)$ и $q(x,y)$ заданные функции. Пуст Ω ограничена сегментами:

$$B_1B_2=\{(x,y): x=0,\ 0<y<h\},$$

$$B_2A_2=\{(x,y): y=h,\ 0<x<1\}$$

при $y<0$ и характеристиками: $A_1C: x-y=1,\ B_1C: x+y=0$.

Для уравнения (1) при $y>0$, здесь $A_1(1;0),\ A_2(1;h),\ B_1(0;0),\ B_2(0;h),\ C(0{,}5;-0{,}5)$.

$$\theta(x)=\theta\left(\frac{x+1}{2};\frac{x-1}{2}\right),$$

Вводим обозначения:

$$D_{xb}^{-\beta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{x}^{b}(t-x)^{\beta-1}f(t)dt, \tag{3}$$

$$\Omega^{+}=\Omega\cap(y>0),\ \Omega^{-}=\Omega\cap(y<0),\ \mathrm{I}=\{x:\ 0<x<1\},\ \mathrm{I}_1=\left\{x:\frac{1}{2}<x<1\right\},\ \mathrm{I}_2=\{y: 0<y<h\},$$

В области Ω доказываем единственность и существование решения следующую задачу

Задача. *Найти решение* $u(x,y)$ *уравнения (1) из классов функции*

1. $u(x,y)\in C(\bar{\Omega});$
2. ${}_{c}D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega^{+}),$
3. $u_{xx}(x,y)\in C(\Omega^{-}\cup\Omega^{+}),\ u_{yy}(x,y)\in C(\Omega^{-})$,
4. $u_x(x,y)\in C(\overline{B_1B_2}\cup\overline{A_1A_2}),\ y^{1-\alpha}u_y(x,y)\in C(\Omega^{+}\cup I),\ u_y(x,y)\in C(\Omega^{-}\cup I);$

удовлетворяющие граничными условиями:

$$u_x(x,y)\big|_{A_1A_2}=\varphi(y),\quad y\in\bar{I}_2, \tag{4}$$

$$u_x(x,y)\big|_{B_1B_2}=\psi(y),\quad y\in\bar{I}_2, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}u\left[\theta(x)\right]=a(x)u_y(x,0)+b(x)u_x(x,0)+c(x)u(x,0)+d(x),\quad x\in I_1, \tag{6}$$

и условием склеивания:

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)\int_x^1 r(t)u_t(t,0)dt+\lambda_3(x)u(x,0),\quad x\in I, \tag{7}$$

где $\varphi(y),\,\psi(y),\,a(x),\,b(x),\,c(x),\,d(x),$ и $\lambda_j(x)\,(j=\overline{1,3})$, *заданные функции, такой, что* $\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^2(x)\neq 0.$

Единственность решения задачи

Известно, что уравнение (1) по характерической координате $\xi=x+y$ и $\eta=x-y$ при $y\le 0$ будет иметь вид:

$$u_{\xi\eta}=\frac{q(\xi)}{4}\int_\xi^1(t-\xi)^{\gamma-1}u_t(t,0)dt. \tag{8}$$

Вводим обозначения:

$$\tau(x)=u(x,0),\quad x\in\bar{I},\quad v^-(x)=u_y(x,-0),\quad x\in I. \tag{9}$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω^- можно представить в виде:

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}v^-(t)dt+\frac{1}{4}\int_{x+y}^{x-y}q(\xi)d\xi\int_\xi^{x-y}d\eta\int_\xi^1(t-\xi)^{\gamma-1}\tau'(t)dt,$$

$$u\left[\theta(x)\right]=\frac{\tau(x)+\tau(1)}{2}-\frac{1}{2}\int_x^1 v^-(t)dt+\frac{1}{4}\int_x^1 q(\xi)d\xi\int_\xi^1 d\eta\int_\xi^1(t-\xi)^{\gamma-1}\tau'(t)dt, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}u\left[\theta(x)\right]=\frac{\tau'(x)+v^-(x)}{2}-\frac{q(x)}{4}\int_x^1 d\eta\int_x^1(t-x)^{\gamma-1}\tau'(t)dt. \tag{11}$$

После использован (6) с учетом (3) из (11) мы получим:

$$(1-2a(x))v^-(x)=\left(2^{-1}(1-x)^\gamma q(x)+2c(x)\right)\tau(x)-(1-2b(x))\tau'(x)+$$
$$+2^{-1}\Gamma(1+\gamma)q(x)D_{x1}^{-\gamma}\tau'(x)-2d(x),\quad (x,0)\in I. \tag{12}$$

С учетом обозначений и условия склеивания (7) имеем:

$$v^+(x)=\lambda_1(x)v^-(x)+\lambda_2(x)\int_x^1 r(t)\tau'(t)dt+\lambda_3(x)\tau(x),\qquad x\in I. \tag{13}$$

Дальше от уравнения (1) при $y\to+0$ с учетом (2), (3) и $\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}f(y)=\Gamma(\alpha)\lim_{y\to0}y^{1-\alpha}f(y)$

Получили |20|:

$$\tau''(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)v^-(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\int_x^1 r(t)\tau'(t)dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\tau(x)+\Gamma(\beta)p(x,0)D_{x1}^{-\beta}\tau'(x)=0, \tag{14}$$

$$\tau'(0)=\psi(0), \quad \tau'(1)=\varphi(0). \qquad (14)$$

Теорема 1. Если $1-2a(x)\neq 0$ и для заданных выполняются условия:

$$c_1(1)\lambda_1(1)+\lambda_3(1)\le 0,\ c_1(0)\lambda_1(0)+\lambda_3(0)\ge 0, \qquad \left(\lambda_2(x)/r(x)\right)'\le 0, \qquad (15)$$

$$\lambda_1(0)q(0)/(1-2a(0))\ge 0,\ \ p(0,0)\ge 0,\ \ p'(x,0)\ge 0,\ \lambda_2(0)/r(0)\le 0, \qquad (16)$$

$$\left(\lambda_1(x)q(x)/(1-2a(x))\right)'\ge 0,\ (\lambda_3(x)+c_1(x)\lambda_1(x))'\ge 0,\ (1-2b(x))\lambda_1(x)/(1-2a(x))\ge 0, \qquad (17)$$

то, решение $u(x,y)$ задачи, единственно.

Доказательство. Известно, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то мы можем утверждать, что исходная задача имеет единственное решение. Для этого предложим,что Задача имеет два решения, а затем обозначив их разность как $u(x,y)$ мы получим соответствующую однородную задачу. Уравнение (14) умножаем на $r'(x)$ и интегрируем от 0 до 1:

$$\int_0^1 \tau''(x)\tau'(x)dx=\varGamma(\alpha)\int_0^1\lambda_1(x)\tau'(x)v^-(x)dx+\varGamma(\alpha)\int_0^1\lambda_2(x)\tau'(x)dx\int_0^1 r(t)\tau'(t)dt+$$
$$+\varGamma(\alpha)\int_0^1\lambda_3(x)\tau(x)\tau'(x)dx-\varGamma(\beta)\int_0^1\tau'(t)\,p(x,0)D_{x1}^{-\beta}\tau'(x)dx \qquad (18)$$

С учетом (12) на счет $d(x)$=0, мы получаем:

$$\int_0^1\tau''(x)\tau'(x)dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1(c_1(x)\lambda_1(x)+\lambda_3(x))d\tau^2(x)-\Gamma(\alpha)\int_0^1\frac{(1-2b(x))\lambda_1(x)}{1-2a(x)}\left[\tau'(x)\right]^2dx-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\gamma)}{2\Gamma(\gamma)}\int_0^1\frac{\lambda_1(x)\tau'(x)q(x)}{1-2a(x)}\int_x^1(t-x)^{\gamma-1}\tau'(t)dt-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1\frac{\lambda_2(x)}{r(x)}d\left(\int_x^1 r(t)\tau'(t)dt\right)^2-\int_0^1\tau'(x)\,p(x,0)dx\int_x^1(t-x)^{\beta-1}\tau'(t)dt, \qquad (19)$$

где $c_1(x)=(1-x)^\gamma q(x)+2c(x)/(1-2a(x))$.

Основываясь на формуле [23]

$$|x-t|^{-\gamma}=\frac{1}{\Gamma(\gamma)\cos\pi\gamma/2}\int_0^\infty z^{\gamma-1}\cos\left[z(x-t)\right]dz,\ \ 0<\gamma<1$$

после некоторых упрощений из (19) мы получим:

$$\int_0^1\tau''(x)\tau'(x)dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\left[\tau^2(1)(c_1(1)\lambda_1(1)+\lambda_3(1))-\tau^2(0)(c_1(0)\lambda_1(0)+\lambda_3(0))\right]-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1\left[\lambda_3(x)+c_1(x)\lambda_1(x)\right]'\tau^2(x)dx-\Gamma(\alpha)\int_0^1\frac{\lambda_1(x)(1-2b(x))}{1-2a(x)}\tau'^2(x)dx+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)\lambda_2(0)}{2r(0)}\left(\int_0^1 r(x)\tau'(x)dx\right)^2+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1\left(\frac{\lambda_2(x)}{r(x)}\right)'dx\left(\int_x^1 r(t)\tau'(t)dt\right)^2+$$
$$+\frac{\gamma\,\Gamma(\alpha)}{2\cos\pi(1-\gamma)/2}\int_0^\infty\frac{dz}{z^\gamma}\int_0^1\frac{\lambda_1(x)q(x)}{1-2a(x)}d\left[\left(\int_x^1\tau'(t)\cos zt\,dt\right)^2+\left(\int_x^1\tau'(t)\sin zt\,dt\right)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-\beta)\cos\pi(1-\beta)/2}\int_0^\infty z^{-\gamma}dz\int_0^1 p(x,0)d\left[\left(\int_x^1\tau'(t)\cos zt\,dt\right)^2+\left(\int_x^1\tau'(t)\sin zt\,dt\right)^2\right].$$

Далее, объединяя по частям в последние два члена, окончательно получаем:

$$\frac{1}{2}\left[\tau'^2(1)-\tau'^2(0)\right]-\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\left[\tau^2(1)(c_1(1)\lambda_1(1)+\lambda_3(1))-\tau^2(0)(c_1(0)\lambda_1(0)+\lambda_3(0))\right]+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1\left[\lambda_3(x)+c_1(x)\lambda_1(x)\right]'\tau^2(x)dx+\Gamma(\alpha)\int_0^1\frac{\lambda_1(x)(1-2b(x))}{1-2a(x)}\tau'^2(x)dx-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha)\lambda_2(0)}{2r(0)}\left(\int_0^1 r(x)\tau'(x)dx\right)^2-\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1\left(\frac{\lambda_2(x)}{r(x)}\right)'\left(\int_x^1 r(t)\tau'(t)dt\right)^2dx+$$
$$+\frac{\gamma\Gamma(\alpha)q(0)\lambda_1(0)}{4(1-2a(0))\sin\pi\gamma/2}\int_0^\infty z^{-\gamma}\left(M^2(0,z)+N^2(0,z)\right)dz+\frac{\gamma\Gamma(\alpha)}{4\sin\pi\gamma/2}\int_0^\infty z^{-\gamma}dz\times$$
$$\times\int_0^1\left[\frac{\lambda_1(x)q(x)}{1-2a(x)}\right]'\left[M^2(x,z)+N^2(x,z)\right]dx+\frac{p(0,0)}{2\Gamma(\beta)\sin\pi\beta/2}\int_0^\infty\frac{M^2(0,z)+N^2(0,z)}{z^\beta}dz+$$
$$+\frac{1}{2\Gamma(\beta)\sin\pi\beta/2}\int_0^\infty z^{-\gamma}dz\int_0^1\left(M^2(x,z)+N^2(x,z)\right)p_x(x,0)dx=0 \qquad (20)$$

где $M(x,z)=\int_x^1\tau'(t)\cos ztdt,$

Таким образом, в силу $\tau'(0)\equiv 0,\ \tau'(1)\equiv 0$ при $\varphi(y)=\psi(y)=0$ (18) в силу (15)-(17) из (20) делается вывод, что $d(x)\equiv 0$. Следовательно, на основе решения второй краевой задачи для уравнения (1) с учетом |20|, |24| на счет (4) и (5), получим $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Далее, из функциональных соотношений (12), с учетом $d(x)\equiv 0$ получаем, что $\nu^-(x)\equiv 0$. Следовательно, на основании решения $u(x,y)\equiv 0$ в замкнутой области $\bar{\Omega}^-$.

Существование решения Задачи

Теорема 2. *Если условия (15)-(17) и*

$$p(x,y)\in C^1(\bar{\Omega}^+)\cap C^2(\Omega^+),\quad q(x+y)\in C(\bar{\Omega}^-)\cap C^2(\Omega^-), \qquad (21)$$

$$\varphi(y),\psi(y)\in C(\bar{I}_2)\cap C^1(I_2);\ a(x), b(x), c(x),\ d(x), \lambda_j(x)\in C^1(\bar{I}_1), (j=\overline{1,3}), \qquad (22)$$

выполнены, то решение исследуемой задачи существует.

Доказательство. С учетом (12) на счет уравнения (14) получим

$$\tau''(x)+A(x)\tau'(x)+B(x)\int_x^1(t-x)^{\gamma-1}\tau'(t)dt+p(x,0)\int_x^1(t-x)^{\beta-1}\tau'(t)dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\int_x^1 r(t)\tau'(t)dt+C(x)\tau(x)=D(x) \qquad (23)$$

здесь

$$A(x)=\frac{\Gamma(\alpha)(1-2b(x))\lambda_1(x)}{1-2a(x)},\qquad B(x)=-\frac{\gamma\Gamma(\alpha)q(x)\lambda_1(x)}{2(1-2a(x))},$$
$$C(x)=-\Gamma(\alpha)(c_1(x)\lambda_1(x)+\lambda_3(x)),\quad D(x)=-\frac{2\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)d(x)}{1-2a(x)}.$$

Отсюда, при $x\to 1$ в силу $\nu(1)=\varphi(0)=\tau'(1)$ заключаем, что

$$\tau(1)=\frac{(1-b(1)-a(1))\varphi(0)-\frac{1}{2}d(1)}{c(1)}. \qquad (24)$$

Интегрируем уравнение (23) от x до 1 и считая (24) после некоторых вычислений, получаем

$$\tau'(x)-\int_x^1 K(x,t)\tau'(t)dt=F(x),\quad x\in\bar{I}, \tag{25}$$

Заметим, что это уравнение является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, где

$$K(x,t)=A(t)+\int_x^t \frac{B(z)}{(t-z)^{1-\gamma}}dz+\int_x^t \frac{p(z,0)}{(t-z)^{1-\beta}}dz-\Gamma(\alpha)\int_x^t \lambda_2(z)r(z)dz-\int_x^t C(z)dz. \tag{26}$$

$$F(x)=\varphi(0)-\int_x^1 D(t)dt-\tau(1)\int_x^1 C(t)dt. \tag{27}$$

В силу (22) и (23) из (26) и (27) с учетом $0<\beta,\gamma<1$ следует, что

$$|K(x,t)|\le c_1 \text{ для любого } 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le 1 \tag{28}$$

$$F(x)\in C\left(\bar{I}\right)\cap C^2(I). \tag{29}$$

Таким образом, учитывая (28) и (29), мы делаем вывод, что уравнение (25) является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода и, основываясь на теории интегральных уравнений типа Вольтерра, мы найдем уникальные решения уравнения (25) в классе $C\left(\bar{I}\right)\cap C^2(I)$. Это решение задается формулой [24]:

$$\tau'(x)=\int_x^1 R(x,t)F(t)dt+F(x),\quad x\in\bar{I}. \tag{30}$$

где – $R(x,t)$ резольвента -ядро из $K(x,t)$. Интегрируя уравнение (30) от x до 1, получаем

$$\tau(x)=-\int_x^1 dt\int_t^1\left[\varphi(0)-\int_z^1 D(\zeta)d\zeta-\tau(1)\int_z^1 C(\zeta)d\zeta\right]R(t,z)\,dz-$$
$$-\int_x^1\left[\varphi(0)-\int_t^1 D(z)dz-\tau(1)\int_t^1 C(z)dz\right]dt,\quad x\in\bar{I}. \tag{31}$$

В силу (27) и (28) из (30) мы заключаем, что

$$\tau(x)\in C^1(\bar{I})\cap C^2(I). \tag{32}$$

Подставляя (30) и (31) в (13) с учетом (21), (22), (32) мы определяем $\nu^-(x)$ в классе

$$\nu^-(x)\in C(\bar{I})\cap C^1(I). \tag{33}$$

Далее, в силу (32), (33), принимая во внимание (12), $x=1$ считая, что $\nu(1)=\tau'(1)=\varphi(0)$ и $c(1)\neq 0$ мы находим неизвестную постоянную $\tau(1)$:

$$\tau(1)=\left[(1-a(1)-b(1))\varphi(0)+d(1)\right]/c(1). \tag{34}$$

Таким образом, решение сформулированной задачи может быть восстановлено в области Ω^+ как решение второй краевой задачи для уравнения (1) (см. [5]), а в области Ω^- как решение задачи Коши для уравнения (1) (см. (9)). Следовательно, сформулированная задача однозначно разрешима.

Теорема 2 доказана.

Замечание. *Если* $a(x)=\frac{1}{2},$ *тогда из (12) следует, что сформулированная задача эквивалентно сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно приведенного* $\tau(x)$ *выше, то будет доказана однозначная разрешимость полученного интегрального уравнения.*

Литературы

Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in: North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York. 1993.

Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press. New York. 1999. 364 p.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Science and Technology. 1987.688 p.

Pskhu A.V. Fractional partial differential equations. Moscow: Nauka, 2005.199 p.

Kadirkulov B. J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative. Electronic Journal of Differential Equations. 2014. 2014(57) . pp. 1–7.

Karimov E.T., Akhatov J.A. Boundary value problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative. Electronic Journal of Differential Equations. 2014. 2014(14). pp. 1–6.

Ashurov R.R., Cabada A., Turmetov B.Kh. Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients. Fract. Calc. & Appl. Anal.Springer, 2016. 19(1). pp. 229-251.

Islomov B. I., Yuldashev T. K., Ubaydullayev.U.Sh. On Boundary Value Problems for a Mixed Type Fractional Differential Equation with Caputo Operator. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. 2021. 1(101). pp.127-137.

Nakhushev A.M. Equations of Mathematical Biology. M .: Higher school, 1995. 301p.

Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. M .: Science. 2012.233p.

Kaziev V.M. Goursat problem for one loaded integro-differential equations. Differential. equations. 1981. T. 17. No 2. pp. 313–319.

B. I. Islomov1, O. Kh. Abdullayev, N. K. Ochilova. On a problem for the loaded degenerating mixed type equation involving integral-differential operators. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2017, 8 (3), p. 1{12}

B. I. Islomov, O. Kh. Abdullayev. Gellerstedt type problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation with Caputo and Erdelyi–Kober operators of fractional order. Russian Mathematics, 2020, Vol. 64, No. 10, pp. 29–42.

Khubiev K.U. On a boundary value problem for a loaded equation of a mixed hyperbolic-parabolic type. Dokl. Adyg. (Circassian.) Intern. acad. sciences. 2005.

Abdullaev O. Kh. A nonlocal problem for a loaded mixed-type equation with integral operator. Vestnik Sam. state tech. university. Series of Physics and Mathematics. 2016.

Abdullaev O.Kh. Some problems for the degenerate mixed type equation involving Caputo and Atangano-Baleanu operators fractional order. Progr. Fract. Differ. Appl. 6, No. 2, 1-14 (2020)

Sabitov K. B., Melisheva E. P. The Dirichlet problem for a loaded mixed-typeequation in a rectangular domain, Russian Math. 2013. 57(7). pp. 53-65.

Sabitov K.B. An initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with loaded terms, Russian Math. 2015.59 (6). pp. 23-33.

Ramazanov M.I. On a nonlocal problem for a loaded hyperbolic-elliptic equation in a rectangular domain. // Mat. magazine. Almaty. 2002.2 (4). pp. 75–81

Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. On a nonlocal problem with conjugation conditions of the integral form for the parabolic-hyperbolic one with the Caputo operator. Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. 2014. No. 4. pp.6-9.

Abdullaev O. Kh. Gellerstedt type problem with integral gluing condition for a mixed type equation with non-linear loaded term. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 479–489

Smirnov M.M. Mixed type equations. M .: Higher school. 1985.304 p.

Mikhlin S.G. Lectures on linear integral equations. M .: Fizmatgiz. 1959.232 p.