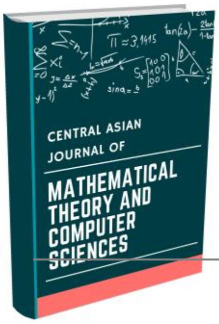

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

https://cajmtcs.centralasianstudies.org

Volume: 04 Issue: 12 | Dec 2023 **ISSN: 2660-5309**

СИСТЕМА ЧАСТИЧНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ

Хайруллаев Исматулла Нуруллаевич

кандидат физико-математических наук, доцент Термезский университет экономики и сервиса (г.Термез, Узбекистан)

Аннотация

Мақолада махсус кўринишдаги ажралган ядроли хусусий интеграл тенгламалар системаси Банах фазосида қаралган. Хусусий интеграл тенгламалар системасини ечишда ажралган ядроли Фредгольм 2-тур интеграл тенгламасини ечиш усулидан фойдаланилган. Системадаги, ва номаълум функциялар берилган функциялар орқали баъзи шартларда аниқ формулалар ёрдамида топилган. Олинган натижалар теорема шаклида ифодаланиб,унинг исботи тўла келтирилган.

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 3 Oct 2023
Revised form 20 Nov 2023
Accepted 5 Dec 2023

Калит сўзлар: *хусусий интеграл, интеграл тенглама,ажралган ядро, интеграл тенгламалар системаси.*

---***---

Исследование спектральных свойств, в частности существование связанных состояний, гамильтонианов нескольких не сохраняющимся **числом** квазичастиц физики твердого тела, квантовой теории поля **статистической** физики тесно связаны с задачей изучения **системы частично** интегральных уравнений специального вида (1) (см [1-2]).

Пусть $C-$одномерное комплексное пространство, $C_{[a,b]}-$**Банахово** пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций и $C_{[a,b]\times[a,b]}$ подпространство симметрических и непрерывных функций **опре**деленных на квадрате $[a,b]\times[a,b]$. В **Банаховом пространстве** $H=C\oplus C_{[a,b]}\oplus C^S_{[a,b]\times[a,b]}$ рассмотрим следующую систему частично интегральных уравнений

$$\begin{cases} f_0+\lambda_1\int\limits_a^b a_1(t)\,f_1(t)dt=g_0, \\ f_0+\ f_1(x)+\lambda_2 a_2(x)\int\limits_a^b a_2(t)\,f_1(t)dt+\lambda_3 a_3(x)\int\limits_a^b a_3(t)\,f_2(x,t)dt=g_1(x), \\ f_1(x)+\ f_2(x,y)+ \\ +\lambda_4 a_4(x)\int\limits_a^b a_4(t)\,f_2(t,y)dt+\lambda_5 a_5(y)\int\limits_a^b a_5(t)\,f_2(x,t)dt=g_2(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

И соответствующее ей систему однородных уравнений

$$\begin{cases} f_0 + \lambda_1 \int_a^b a_1(t) f_1(t)dt = 0, \\ f_0 + f_1(x) + \lambda_2 a_2(x) \int_a^b a_2(t) f_1(t)dt + \lambda_3 a_3(x) \int_a^b a_3(t) f_2(x,t)dt = 0, \\ f_1(x) + f_2(x,y) + \\ + \lambda_4 a_4(x) \int_a^b a_4(t) f_2(t,y)dt + \lambda_5 a_5(y) \int_a^b a_5(t) f_2(x,t)dt = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $a_i(1,2,...,s)$ - данные непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\int_a^b a_i(t)dt = 0, \quad \int_a^b a_i^2(t)dt = 1, \quad i = 1,2,3,4,5;$$

$g = (g_0, g_1(x), g_2(x.y)) \in H -$ данная функция, $f = (f_0, f_1(x), f_2(x.y)) \in H -$ искомая функция. Отметим, что частично интегральные уравнения изучались в работах [3-6].

Теорема. Если $\lambda_2 \neq -1,\ \lambda_4 \neq -1,\ \lambda_5 \neq -1$ и $\lambda_4 + \lambda_5 \neq -1,$ то:

а) система имеет единственное решение для любого $g \in H$;

б) однородная система (2) имеет тривиальное решение.

Доказательства теоремы .Для доказательства теоремы сначала необходимо получить некоторое интегральное уравнение типа Фредгольма. С этой целью будем сначала решить частично- интегральное уравнение, т.е. функцию $f_2(x,y)$ выразим через $g_2(x,y)$ *и* $f_1(x)$.Очевидно, что из первого уравнения системы (**1**) f_0 выражается через интегралы f_1 *и* g_0. Если полученные выражения для $f_2(x,y)$ и f_0 подставим во второе уравнение системы,то мы получим искомое частично-интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром. Решая интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром определим неизвестную функцию $f_1(x)$ через данные системы уравнении (**1**).Далее,подставляя полученное для $f_1(x)$ выражение в соответствующие выражения для функций f_0 и $f_2(x,y)$ мы явно находим единственное решение системы (**1**).

Дальнейшая часть работы посвящается реализацию этой программы. Считая функцию $f_1(x)$ известной находим из частично- интегрального уравнения системы (**1**) функцию $f_2(x,y)$. Вводя новых неизвестных функций $a_{42}(y)$ и $a_{52}(x)$ по формулам

$$\begin{cases} a_{42}(y) = \int_a^b a_4(t) f_2(t,y)dt \\ a_{52}(x) = \int_a^b a_5(t) f_2(x,t)dt \end{cases} \qquad (3)$$

получим следующее выражение для функции $f_2(x,y)$:

$$f_2(x,y)=g_2(x,y)-f_1(x)-\lambda_4 a_4(x)a_{42}(y)-\lambda_5 a_5(x)a_{52}(x). \quad (4)$$

Теперь наша задача сводилась к нахождению функций a_{42} и a_{52}. Подставляя выражение (4) функции $f_2(x,y)$ в систему (3) и учитывая из условий $\lambda_4 \neq -1,\ \lambda_5 \neq -1,\ \int_a^b a_4^2(t)dt = \int_a^b a_5^2(t)dt = 1$.

Получим систему интегральных уравнений для определения $a_{42}(y)$, $a_{52}(x)$

$$\begin{cases} a_{42}(y)=\dfrac{1}{1+\lambda}\left[\int_a^b a_4(t)g_2(t,y)dt+\int_a^b a_4(t)f_1(t)dt+\lambda_5 a_5\int_a^b a_4(t)a_{52}(t)dt\right], \\ a_{52}(x)=\dfrac{1}{1+\lambda}\left[\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt+\lambda_4 a_4(x)\int_a^b a_5(t)a_{42}(t)dt\right] \end{cases} \quad (5)$$

С целью найти $a_{42}(y)$ и $a_{52}(x)$ подставим выражение для $a_{52}(x)$ в первое уравнение системы(5) и имеем интегральное уравнение с вырожденным ядром относительно $a_{42}(y)$ вида

$$a_{42}(y)=\frac{\lambda_4\lambda_5 a_5(y)}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)}\int_a^b a_5(s)a_{42}(s)ds+\frac{1}{1+\lambda_4}\int_a^b a_4(t)g_2(t,y)dt+$$

$$-\frac{1}{1+\lambda_4}\int_a^b a_4(t)f_1(t)dt+\frac{\lambda_5 a_5(y)}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)}\int_a^b\int_a^b a_4(t)a_5(t)g_2(t,s)dtds. \quad (6)$$

Это уравнение сводиться линейному алгебраическому уравнению. Вводя неизвестную постоянную

$$C=\int_a^b a_5(s)a_{42}(s)ds \quad (7)$$

в уравнении (6). И обозначая через $F(g_2, f)$ функцию

$$F(g_2,f)=\frac{1}{1+\lambda_4}\int_a^b a_4(t)g_2(t,y)dt-$$

$$-\frac{1}{1+\lambda_4}\int_a^b a_4(t)f_1(t)dt-\frac{\lambda_5 a_5(y)}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)}\int_a^b\int_a^b a_4(t)a_5(t)g_2(t,s)dtds. \quad (8)$$

Мы получим следующее выражение для $a_{42}(y)$ в виде

$$a_{42}(y)=\frac{\lambda_4\lambda_5}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)}a_5(y)C+F(g_2,f_1). \quad (9)$$

Подстановкой (9) в (7) и используя условий $\int_a^b a_5^2(s)ds=1,\ \lambda_4+\lambda_5\neq -1$ однозначно определяем C:

$$C=\frac{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)}{1+\lambda_4+\lambda_5}\int_a^b a_5(y)F(g_2,f_1)ds\,.\,(10)$$

Выражение функции $F(g_2,f_1)$ из (8) подставим в (10) и после соответствующих упрощений, при условиях $\int_a^b a_5(s)ds=0,\ \int_a^b a_5^2(s)ds=1,$ получим:

$$C=\frac{1}{1+\lambda_4+\lambda_5},\qquad g_{45}=\frac{1}{1+\lambda_4+\lambda_5}\int_a^b\int_a^b a_4(t)a_5(s)g_2(t,s)dtds.\,(11)$$

Теперь подставляя в (9) найденное значение C виде (11) и выражение функции $F(g_2,f_1)$ из (8), вышолнив некоторых упрощений имеем:

$$a_{42}(y)=\frac{1}{1+\lambda_4}\left[\int_a^b a_4(t)(g_2(t,y)-f_1(t))ds\right]-\frac{\lambda_5 g_{45}}{1+\lambda_4+\lambda_5}a_{52}.\,(12)$$

Теперь сценю нахождения $a_{52}(x)$ выражение (12) для $a_{42}(y)$ подставляем во второе уравнение системы (5). Воспользуясь с обозначения $g_{45}=\int_a^b\int_a^b a_4(t)a_5(s)g_2(t,s)dtds$ и учитывая условий $\int_a^b a_5(s)ds=0,\ \int_a^b a_5^2(s)ds=1,$ находим $a_{52}(x)$ в вид

$$a_{52}(x)=\frac{1}{1+\lambda_4}\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)-\frac{\lambda_4 g_{45}a_4(x)}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_4+\lambda_5)}.\,(13)$$

Далее,подставляя в (4) выражения (12) и (13) для функции $a_{42}(y)$ и $a_{52}(x)$. Соответственно, после некоторых вычислении получим следующее выражение для $f_2(x,y)$:

$$f_2(x,y)=g_2(x,y)-f_1(x)+\frac{\lambda_4}{1+\lambda_4}a_4(x)\int_a^b a_4(t)f_1(t)dt-\frac{\lambda_4}{1+\lambda_4}a_4(x)\int_a^b a_4(t)g_2(t,y)dt-$$

$$-\frac{\lambda_5}{1+\lambda_4}a_5(y)\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt+\frac{\lambda_4\lambda_5 g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}a_4(x)a_5(y).$$

(14)

Теперь из первого уравнения системы (1) найдем f_0:

$$f_0=g_0-\lambda_1\int_a^b a_1(t)f_1(t)dt\ \ (15)$$

Подстановкой во второе уравнение системы (1) найденные выражения функций f_0 в f_1 из (14) и(15), учитывая условию $\int_a^b a_3(t)dt$ и обозначений

$$A_{35}=\int_a^b a_3(t)a_5(t)dt=0,\ g_{43}=\int_a^b\int_a^b a_4(t)a_3(s)g_2(t,s)dtds,$$

приходим следующему интегральному уравнению относительно $f_1(t)$:

$$f_1(x)-\lambda_1\int_a^b a_1(t)f_1(t)dt+\lambda_2 a_2(x)\int_a^b a_2(t)f_1(t)dt=g_1(x)-g_0-\lambda_0 a_3(x)\int_a^b a_3(t)g_2(x,t)dt+$$
$$+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}a_3(x)\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}g_{43}a_5(x)a_4(x)-\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}a_3(x)a_4(x). \quad \textbf{(16)}$$

Это и есть искомое для функции $f_1(t)$ интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$f_1-\int_a^b\left[\lambda_1 a_1(t)-\lambda_2 a_2(t)a_3(t)\right]f_1(t)dt=\psi(x).$$

Здесь правая часть уравнения (16) обозначена через $\psi(x)$, т. е.

$$\psi(x)=g_1(x)-g_0-\lambda_3 a_3(t)\int_a^b a_3(t)g_2(x,t)dt+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}a_3(x)\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt+$$
$$+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}g_{43}a_3(x)a_4(x)-\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}g_{45}a_3(x)a_4(x). \quad (17)$$

Пусть

$$\begin{cases} b_1=\int_a^b a_1(t)f_1(t)dt, \\ b_2=\int_a^b a_2(t)f_1(t)dt. \end{cases} \quad (18)$$

Тогда функция $f_1(x)$ запишется в виде

$$f_1(t)=\psi(x)+\lambda_1 b_1-\lambda_2 a_2(x)b_2. \quad (19)$$

Подставляя выражение для $f_1(x)$ (19) в (18) имеем систему линейных уравнений относительно неизвестных b_1 и b_2

$$\begin{cases} b_1=\int_a^b a_1(t)\left[\psi(x)+\lambda_1 b_1-\lambda_1 a_2(x)b_2\right]dt, \\ b_2=\int_a^b a_2(t)\left[\psi(x)+\lambda_1 b_1-\lambda_1 a_2(x)b_2\right]dt. \end{cases} \quad \textbf{(20)}$$

Обозначая через A_{12} интеграл $A_{12}=\int_a^b a_1(t)a_2(t)dt$ и учитывая условий

$$\int_a^b a_1(t)dt = \int_a^b a_2(t)dt = 0, \quad \int_a^b a_1^2(t)dt = 1,$$

из системы (20) получим:

$$\begin{cases} b_1 = \int_a^b a_1(t)\psi(x)dt - \lambda_2 A_{12} b_2, \\ b_2 = \int_a^b a_2(t)\psi(x)dt - \lambda_2 b_2. \end{cases} \tag{21}$$

Если $\lambda_2 \neq -1$, то из второго уравнения системы (**21**) найдем b_2 в виде

$$\begin{cases} b_2 = \dfrac{1}{1+\lambda_2}\int_a^b a_2(t)\psi(x)dt \quad \text{с помощью чего находим } b_1, \\ b_1 = \int_a^b a_1(t)\psi(x)dt - \dfrac{\lambda_2}{1+\lambda_2} A_{12}\int_a^b a_2(t)\psi(x)dt = \int_a^b \left[a_1(t) - \dfrac{\lambda_2 A_{12}}{1+\lambda_2} a_2(t) \right]\psi(x)dt. \end{cases} \tag{22}$$

Подставляя значений b_1 и b_2 в выражение (19) находим функцию $f_1(x)$:

$$f_1(x) =$$
$$= \lambda_1 \left[\int_a^b a_1(t)g_1(t)dt - \lambda_3 g_{133} + \frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5} A_{35} g_{135} + \frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4} A_{134} g_{43} - \frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}A_{134}g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)} \right] -$$
$$-\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}[\lambda_1 A_{12} + a_2(x)] \left[\int_a^b a_2(t)g_1(t)dt - \lambda_3 g_{233} + \frac{\lambda_3\lambda_5 g_{235}}{1+\lambda_5} + \frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5} A_{234} g_{43} - \frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}A_{234}g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)} \right] + g_1(x) - g_0 -$$
$$-\lambda_3 a_3(x)\int_a^b a_3(t)g_2(x,t)dt + \frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5} A_{35} a_3(x)\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt + \frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4} g_{43} a_3(x)a_4(x) -$$
$$-\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)} a_3(x)a_4(x), \tag{23}$$

где

$$A_{j_1 j_2 j_3} = \int_a^b a_{j_1}(t)a_{j_2}(t)a_{j_3}(t)dt, \qquad g_{i_1 i_2 i_3} = \int_a^b\int_a^b a_{i_1}(t)a_{i_2}(t)a_{i_3}(t)g_2(t,s)dtds,$$

а $\psi(x)$ определяется формулой (18). И с помощью последнего из (15) найдем f_0 в виде;

$$f_0(x) = g_0 -$$
$$-\lambda_1 \left[\int_a^b a_1(t)g_1(t)dt - \lambda_3 g_{133} + \frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5} A_{35} g_{135} + \frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4} A_{134} g_{43} - \frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}A_{134}g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)} \right] +$$
$$+\frac{\lambda_1\lambda_2 A_{12}}{1+\lambda_2} \left[\int_a^b a_2(t)g_1(t)dt - \lambda_3 g_{233} + \frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5} A_{234} g_{135} + \frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4} A_{234} g_{43} - \frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}A_{234}g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)} \right] \tag{24}$$

Далее, учитывая (22), из (14) найдем $f_2(x,y)$ нижеследующем виде;

$$f_2(x,y)=$$

$$=g_2(x,y)-g_1(x)-g_0-\frac{\lambda_4}{1+\lambda_4}a_4(x)\int_a^b a_4(t)g_2(t,y)dt+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}g_3(x)\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt+$$

$$+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}g_{34}a_3(x)a_4(x)-\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}a_3(x)a_4(x)+\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}a_4(x)a_5(y)-$$

$$-\lambda_1\left[\int_a^b a_1(t)g_1(t)dt-\lambda_3 g_{133}+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}g_{135}+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}A_{134}g_{43}-\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}A_{134}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}\right]+$$

$$+\left[\frac{\lambda_1\lambda_2A_{12}-\lambda_2a_2(x)}{1+\lambda_2}-\frac{\lambda_2\lambda_4A_{24}a_4(x)}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_4)}\right]\left[\int_a^b a_2(t)g_1(t)dt-\lambda_3 g_{233}+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}g_{235}+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}A_{234}g_{43}-\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}A_{234}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}g_{45}\right]+$$

$$+\frac{\lambda_4a_4(x)}{1+\lambda_4}\left[\int_a^b a_4(t)g_1(t)dt-\lambda_3 g_{433}+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}g_{435}+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}A_{434}g_{43}-\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}A_{434}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}g_{45}\right]. \quad (25)$$

и, наконец вводим следующие обозначения в выражениях (23), (24), (25);

$$C=\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)A_{35}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}g_{45},$$

$$B_i=\int_a^b a_i(t)g_1(t)dt-\lambda_3 g_{i33}+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}g_{i35}+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}A_{i34}g_{43}-CA_{i34}, \quad i=\overline{1,4}$$

Тогда для функций f_0, $f_1(x)$ и $f_2(x,y)$ получим:

$$f_0=g_0+\lambda_1[B_1]+\frac{\lambda_1\lambda_2A_{12}}{1+\lambda_2}[B_2] \quad (24')$$

$$f_1(x)=$$

$$=\lambda_1[B_1]+\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}(\lambda_1A_{12}+a_2(x))[B_2]+g_1(x)-g_0-\lambda_3a_3(x)\int_a^b a_3(t)g_2(x,t)dt+ \quad (23')$$

$$+\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}a_3(x)\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt+\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}g_{43}a_3(x)a_4(x)-Ca_3(x)a_4(x).$$

$$f_2(x,y)=g_2(x,y)-g_1(x)+g_0-$$

$$-\frac{\lambda_4}{1+\lambda_4}a_4(x)\int_a^b a_4(t)g_2(t,y)dt+\frac{\lambda_5a_5(y)}{1+\lambda_5}\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt+\lambda_3a_3(x)\int_a^b a_3(t)g_2(x,t)dt- \quad (25')$$

$$-\frac{\lambda_3\lambda_5}{1+\lambda_5}A_{35}a_3(x)\int_a^b a_5(t)g_2(x,t)dt-\frac{\lambda_3\lambda_4}{1+\lambda_4}g_{43}a_3(x)a_4(x)+Ca_3(x)a_4(x)-\lambda_1[B_1]+\frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(2+\lambda_4+\lambda_5)g_{45}}{(1+\lambda_4)(1+\lambda_5)(1+\lambda_4+\lambda_5)}a_4(x)a_5(y)+$$

$$+\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}\left[\lambda_1A_{12}+a_2(x)-\frac{\lambda_4A_{24}a_4(x)}{1+\lambda_4}\right][B_2]+\frac{\lambda_4}{1+\lambda_4}a_4(x)[B_4]$$

Таким образом, рассматриваемая система (1) имеет единственное решение, которое находится с помощью формул (23), (24) и (25).Тем самым мы доказали часть а) теоремы.

Теперь докажем часть б). В силу однородности системы (2) имеем $g_0 = 0,\ g_1 = 0,\ g_2(x, y) = 0$. На основе этого, правые части равенств (23), (24) и (25) равны нулю, т.е. имеет место тождества $f_0 = 0$, $f_1(x) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$.

Значить, данная однородная система имеет только нулевые решение.

Теорема доказана полностью.

Список литературы

1. Mattis D. The few-body problem on a lattice //Rev. Modern phys. 58(1986), 361-379.
2. Mogilner A.I. Hamiltonians in Solid-State Physics as Multipartcle Discrete Schrodinger Operators.// Advances in Sovet Mathematics. V.S.(1991),139-194.
3. Abdus Salam. Fredholm Solutions of Partial Integral Equations. Proc. Cambridge. Philos. Soc. 49(1952), 213-217.
4. Stefan Fenyo. Beitreg Sur Theorie der Linearen Integral-gleichungen. Publs, mat 1955. no; 1,2. P.98-103.
5. Лихтарников Л.М. Дифференциальные уравнения. //1975, 11, N6, С. 1108-1117.
6. Лакаев С.Н., Соатов $У$.А. ”О решении частично интегрального уравнения для функций трех переменных” ДАН РУз, 1997, N11.