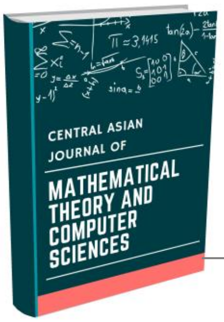

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS

Volume: 03 Issue: 04 | Apr 2022 ISSN: 2660-5309

Вычисленние Квадрат Нормы Функционала Погрошности Улучшенных Квадратурных Формул В Пространстве $W_2^{(6,5)}(0,1)$

Р. Расулов, А. Сатторов, Д. Махкамова

Ферганский политехнический институт

Аннотатция:

Настоящая работа посвящена расширению формулы Эйлера-Маклорена в пространстве . Оптимальная квадратурная формула получена минимзируя погрешности формулы по коэффициентам при значений первого производного подынтегральной функции. Используя дискретную аналог оператора получены явные формулы для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы.

Кроме того, что погрешность построенной квадратурной формулы меньше чем погрешность кадратурной формулы Эйлера-Маклорена на пространстве $L_2^{(6)}$.

ARTICLEINFO

Article history:

Received 26 Feb 2022

Revised form 19 Mar 2022

Accepted 29 Apr 2022

Ключевые слова: Гильбертово пространство; экстремальная функция; обобщенная функция; оператор; оптимальная квадратурная формула.

---***---

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что квадратурные и кубатурные формулы являются методами приближенной оценки определенных интегралов. Кроме того, и что еще более важно, квадратурные формулы предоставляют основной и важный инструмент для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Теория кубатурных формул состоит в основном из трех разделов, касающихся точных формул, формул, основанных на функционально-аналитических методах, и формул, основанных на вероятностных методах. В функционально-аналитических методах погрешности между интегральной и соответствующей кубатурной суммой рассматривается как линейный функционал на банаховом пространстве и оценивается по норме функционала погрешности в сопряженном банаховом пространстве. Норма функциональной ошибки зависит от коэффициентов и узлов формулы. Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности по коэффициентам и узлам называется *задачей С. М. Никольского*, а полученная формула называется *оптимальной формулой в смысле Никольского*. Минимизация нормы функционала погрешности с помощью коэффициентов при фиксированных узлах называется *проблема Сарда*. И полученная формула называется *оптимальная формула в смысле Сарда*. Сначала эта проблема была изучена А.Сардом. Решая эти задачи в различных пространствах дифференцируемых функций, получены различные типы оптимальных формул численного интегрирования.

Квадратурные формулы Эйлера-Маклорена можно рассматривать как расширение формулы трапеции путем включения поправочных членов. Следует отметить, что в приложениях и при решении практических задач численные формулы интегрирования интересны для функций с малой гладкостью.

Настоящая статья также посвящена расширению формулы Эйлера-Маклорена.

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N}\left(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)+C_3[\beta]\varphi'''(h\beta)+C_5[\beta]\varphi^{(5)}(h\beta)\right) \qquad (1)$$

где

$$\begin{aligned} C_0[0] &= \frac{h}{2}, \\ C_0[\beta] &= h,\ \beta=1,2,...,N-1, \\ C_0[N] &= \frac{h}{2}, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} C_1[0] &= \frac{h^2}{12}, \\ C_1[\beta] &= 0,\ \beta=1,2,...,N-1, \\ C_1[N] &= -\frac{h^2}{12}, \end{aligned} \qquad (3)$$

и

$$\begin{aligned} C_3[0] &= -\frac{h^4}{720}, \\ C_3[\beta] &= 0,\ \beta=1,2,...,N-1, \\ C_3[N] &= \frac{h^4}{720}, \end{aligned} \qquad (4)$$

$C_5[\beta]$ - неизвестные коэффициенты формулы (1), и их следует найти, $h=\frac{1}{N}$, N - натуральное число.Предположим, что подынтегральное выражение φ принадлежит $W_2^{(6,5)}(0,1)$, где через $W_2^{(6,5)}(0,1)$ мы обозначаем класс всех функций φ, определенных на $[0,1]$, которые обладают абсолютно непрерывной пятой производной и чья шестая производная которого находится в $L_2(0,1)$. Класс $W_2^{(6,5)}(0,1)$ скалярным произведением

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1(\varphi^{(6)}(x)+\varphi^{(5)}(x))(\psi^{(6)}(x)+\psi^{(5)}(x))dx$$

является гильбертовым пространством, если мы отождествляет функции, которые отличаются линейной комбинацией $1, x, x^2, x^3, x^4$ и e^{-x}.Здесь в гильбертовом пространстве $W_2^{(6,5)}(0,1)$ мы рассматриваем соответствующую норму

$$\|\varphi \,|\, W_2^{(6,5)}(0,1)\| = \left[\int_0^1 (\varphi^{(6)}(x)+\varphi^{(5)}(x))^2 \, dx\right]^{1/2}. \qquad (5)$$

Разница

$$(\ell,\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N}\big(C_0[\beta]\varphi(h\beta) + C_1[\beta]\varphi'(h\beta) + $$
$$+ C_3[\beta]\varphi'''(h\beta) + C_5[\beta]\varphi^{(5)}(h\beta)\big) \qquad (6)$$

называется *погрешности* и

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N}\big(C_0[\beta]\delta(x-h\beta) - C_1[\beta]\delta'(x-h\beta) - $$
$$- C_3[\beta]\delta'''(x-h\beta) - C_5[\beta]\delta^{(5)}(x-h\beta)\big) \qquad (7)$$

называется *функционалом погрешности* квадратурной формулы (1), где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - индикатор интервала $[0,1]$ и δ - дельта-функция Дирака. Значение (ℓ,φ) функционала погрешности ℓ в функции φ определяется как $(\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx.$

Известно, что погрешность формулы (1) по неравенству Коши-Шварца оценивается с помощью нормы функционала погрешности, т.е.

$$|(\ell,\varphi)| \le \|\varphi \,|\, W_2^{(6,5)}(0,1)\| \cdot \|\ell \,|\, W_2^{(6,5)*}(0,1)\|.$$

где $|(\ell,\varphi)|$- погрешность формулы (1), $W_2^{(6,5)*}(0,1))$ – сопряженное пространство к пространству $W_2^{(6,5)}(0,1)$.

Квадратурная формула вида (1) с коэффициентами $C_5[\beta]$, которая дают минимум норме функционала погрешности называется оптимальной квадратурной формулой типа Эйлера-Маклорена. Оптимальная формула вида (1) построена в работе [1]. В той же работе для нормы функционала погрешности ℓ квадратурной формулы получено следующее выражение

$$\|\ell\|^2 = (\ell,\psi_\ell) = -\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_5[\beta]C_5[\gamma]G_1(h\beta-h\gamma)$$
$$+2\sum_{\beta=0}^{N} C_5[\beta]\Big(\int_0^1 G_4'(x-h\beta)dx + \sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma]G_4'(h\beta-h\gamma) - \sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma]G_3(h\beta-h\gamma) - \sum_{\gamma=0}^{N} C_3[\gamma]G_2(h\beta-h\gamma)\Big) +$$
$$+\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\beta]C_0[\gamma]G_6(h\beta-h\gamma) - 2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\beta]C_1[\gamma]G_6'(h\beta-h\gamma) - 2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\beta]C_3[\gamma]G_5'(h\beta-h\gamma) +$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\beta]C_1[\gamma]G_5(h\beta-h\gamma)-2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\beta]C_3[\gamma]G_4(h\beta-h\gamma)-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_3[\beta]C_3[\gamma]G_3(h\beta-h\gamma)-$$

$$-2\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\int_0^1 G_6(x-h\beta)dx+2\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\int_0^1 G_6'(x-h\beta)dx+2\sum_{\beta=0}^{N}C_3[\beta]\int_0^1 G_5'(x-h\beta)dx+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 G_6(x-y)dxdy, \quad (8)$$

где

$$G_1(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right),\ G_2(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x\right),$$

$$G_3(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\frac{x^3}{3!}-x\right),\ G_4(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3}{3!}-x\right),$$

$$G_5(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\frac{x^7}{7!}-\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3}{3!}-x\right),$$

$$G_6(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\frac{x^9}{9!}-\frac{x^7}{7!}-\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3}{3!}-x\right).$$

Там же с помощью минимизации нормы функционала погрешности по $C_5[\beta]$ получена следующая система

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_5[\gamma]G_1(h\beta-h\gamma)+de^{-h\beta}=F(h\beta),\ \ \beta=0,1,2,...,N,\ (9)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_5[\gamma]e^{-h\gamma}=g.(10)$$

где а правая часть (9) выражается формулой

$$F(h\beta)=(e^{-h\beta}-e^{h\beta-1})\cdot\frac{e+1}{4}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12}-\frac{h^4}{720}-\frac{h}{e^h-1}\right), \quad (11)$$

$$g=\frac{1-e}{e}\cdot\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12}-\frac{h^4}{720}-\frac{h}{e^h-1}\right). \quad (12)$$

В системе (9)-(10) неизвестными являются $C_5[\beta],\beta=0,1,...,N$.В работе [1] система (9)-(10) полностью решена.

В работе [1] получены следующие явные формулы для оптимальныхкоэффициентов $\overset{\circ}{C}_5[\beta]$ (Теорема 3 работы [1]):

$$C_5[0]=\frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)}+\frac{h^4}{720}-\frac{h^2}{12}-1, \qquad C_5[\beta]=0,\quad \beta=1,2,...,N-1, \tag{13}$$

$$C_5[N]=-\frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)}-\frac{h^4}{720}+\frac{h^2}{12}+1.$$

Цельюнастоящейработыявляетсявычислениенормыоптимальногофункционала погрешности (7).

Имеет место следующее

Теорема 1. *Квадрат нормы функционала погрешности (7) для оптимальной квадратурной формулы (1) с коэффициентами (2), (3), (4) и (13) на пространстве* $W_2^{(6,5)}(0,1)$ *имеет вид*

$$\left\|\ell\,|\,W_2^{(6,5)*}(0,1)\right\|^2=-\sum_{n=12}^{\infty}\frac{B_n h^n}{n!}$$

$$=\frac{691}{1307674368000}h^{12}-\frac{1}{74724249600}h^{14}+O(h^{15}), \tag{14}$$

где B_n - числа Бернулли.

Доказательство. Перепишем выражение (8) следующим образом

$$\|\ell\|^2=-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_5[\beta](\sum_{\gamma=0}^{N}C_5[\gamma]G_1(h\beta-h\gamma)-F(h\beta))+\sum_{\gamma=0}^{N}C_5[\gamma]F(h\beta)+$$

$$+\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\beta]C_0[\gamma]G_6(h\beta-h\gamma)-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\beta]C_1[\gamma]G_5(h\beta-h\gamma)-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_3[\beta]C_3[\gamma]G_3(h\beta-h\gamma)-$$

$$-2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\beta]C_1[\gamma]G_6'(h\beta-h\gamma)-2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\beta]C_3[\gamma]G_5'(h\beta-h\gamma)-2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\beta]C_3[\gamma]G_4(h\beta-h\gamma)-$$

$$-2(\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\int_0^1 G_6(x-h\beta)dx-\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\int_0^1 G_6'(x-h\beta)dx-\sum_{\beta=0}^{N}C_3[\beta]\int_0^1 G_5'(x-h\beta)dx)+\int_0^1\int_0^1 G_6(x-y)dxdy, \tag{15}$$

где $F(h\beta)$ определяется как (11).

Следовательно, учитывая (9), мы имеем

$$\left\|\ell\,|\,W_2^{(6,5)*}(0,1)\right\|^2=A_1+A_2-A_3-A_4-2A_5-2A_6-2A_7-2A_8+2A_9+2A_{10}+A_{11}, \tag{16}$$

где

$$A_1=\sum_{\beta=0}^{N}C_5[\beta]\,F(h\beta),\ A_2=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\beta]C_0[\gamma]G_6(h\beta-h\gamma),$$

$$A_3=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\beta]C_1[\gamma]G_5(h\beta-h\gamma),\ A_4=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_3[\beta]C_3[\gamma]G_3(h\beta-h\gamma),$$

$$A_5=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\beta]C_1[\gamma]G_6'(h\beta-h\gamma),\ A_6=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\beta]C_3[\gamma]G_5'(h\beta-h\gamma),$$

$$A_7=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\beta]C_3[\gamma]G_4(h\beta-h\gamma),\ A_8=\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\int_0^1 G_6(x-h\beta)dx,$$

$$A_9=\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\int_0^1 G_6'(x-h\beta)dx,\ A_{10}=\sum_{\beta=0}^{N}C_3[\beta]\int_0^1 G_5'(x-h\beta)dx,$$

$$A_{11}=\int_0^1\int_0^1 G_6(x-y)dxdy.$$

Теперь нам нужны следующие суммы, которые получены с помощью (2) и (13)

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]=1,\qquad \sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)^2=\frac{h^2}{6}+\frac{1}{3},$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_5[\beta]e^{-h\beta}=\frac{1-e}{e}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12}-\frac{h^4}{720}-\frac{h}{e^h-1}\right),$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_5[\beta]e^{h\beta}=(e-1)\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12}-\frac{h^4}{720}-\frac{h}{e^h-1}\right).$$

Учитывая (11) и $G_6(x)$, используя (14) для $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10}$ и A_{11}, мы получить

$$A_1=\frac{1-e^2}{2e}\Big(1-\frac{h(e^h+1)}{e^h-1}+\frac{h^2(5e^{2h}+2e^h+5)}{12(e^h-1)^2}-\frac{h^3(e^h+1)}{12(e^h-1)}+$$
$$+\frac{h^4}{720}+\frac{h^5(e^h+1)}{720(e^h-1)}-\frac{h^6}{4320}+\frac{h^8}{518400}\Big),$$

$$A_2=\frac{h(1+e^h)}{2(1-e^h)}+\frac{h^2(e^h+1)^2(e^2-1)}{8e(e^h-1)^2}-\frac{245017h^2}{2177280}-\frac{7603h^4}{1209600}+$$
$$+\frac{11h^6}{48384}-\frac{11h^8}{1451520}-\frac{h^{10}}{4790016}-\frac{2331157}{13305600},$$

$$A_3 = \frac{h^4}{288}e^{-1} - \frac{h^4}{288}e + \frac{5923}{725760}h^4,$$

$$A_4 = \frac{h^8}{1036800}e^{-1} - \frac{h^8}{1036800}e + \frac{7}{3110400}h^8,$$

$$A_5 = -\frac{426457}{4354560}h^2 + \frac{h^3(e^h+1)(e^2-1)}{48e(e^h-1)} - \frac{5923}{725760}h^4 + $$
$$+\frac{47}{345600}h^6 - \frac{h^8}{311040} + \frac{h^{10}}{14515200},$$

$$A_6 = \frac{5923}{3628800}h^4 + \frac{h^5(e^h+1)(1-e^2)}{2880e(e^h-1)} + \frac{47}{345600}h^6 - \frac{7}{3110400}h^8 + \frac{h^{10}}{21772800},$$

$$A_7 = -\frac{h^6}{17280}e^{-1} + \frac{h^6}{17280}e - \frac{47}{345600}h^6,$$

$$A_8 = \frac{h}{4}\cdot\frac{(e^h-1)(1-e^2)}{e(e^h-1)} - \frac{426457}{4354560}h^2 + \frac{5923}{3628800}h^4 - \frac{47}{1209600}h^6 + $$
$$+\frac{h^8}{1036800} + \frac{h^{10}}{47900160} - \frac{15636757}{13305600},$$

$$A_9 = -\frac{h^2}{24}e^{-1} + \frac{h^2}{24}e - \frac{426457}{4354560}h^2,$$

$$A_{10} = \frac{h^4}{1440}e^{-1} - \frac{h^4}{1440}e + \frac{5923}{3628800}h^4,$$

$$A_{11} = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e - \frac{15636757}{13305600}.$$

Далее, поместив последние равенства в (15) и после некоторых упрощений

$$\left\|\ell \,|\, W_2^{(6,5)*}(0,1)\right\|^2 = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{12}h^2 - \frac{1}{720}h^4 + \frac{1}{30240}h^6 - $$
$$-\frac{1}{1209600}h^8 + \frac{1}{47900160}h^{10} - \frac{h}{e^h-1}.$$

Следовательно, используя хорошо известную формулу $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n,\ |x| < 2\pi$, получаем (14).

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что оптимальность классического Эйлера-Маклорена была доказана и погрешности этой квадратурной формулы была вычислена в $L_2^{(m)}$, где $L_2^{(m)}$ - это пространство функций, интегрируемых в квадрат с m -й обобщенной производной. Мы получаем оптимальность формулы Эйлера-Маклорена

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong h\left(\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(h)+\varphi(2h)+...+\varphi(h(N-1))+\frac{1}{2}\varphi(1)\right)+$$

$$=\frac{h^2}{12}(\varphi'(0)-\varphi'(1))-\frac{h^4}{720}(\varphi'''(0)-\varphi'''(1))+\frac{h^6}{30240}(\varphi^{(5)}(0)-\varphi^{(5)}(1)), \quad (17)$$

в пространстве $L_2^{(6)}(0,1)$. Кроме того, для квадрата нормы функционала погрешности справедливо следующее

$$\|\ell\,|\,L_2^{(6)*}(0,1)\|^2=\frac{691}{1307674368000}h^{12}. \tag{18}$$

Сравнение равенств (14) и (18) показывает, что погрешность оптимальной квадратурной формулы вида (1) на пространстве $W_2^{(6,5)}(0,1)$ меньше погрешности квадратурной формулы Эйлера-Маклорена (17) на пространстве $L_2^{(6)}(0,1)$.

Литература

1. Rashidjon R., Sattorov A. Optimal Quadrature Formulas with Derivatives in the Space //Middle European Scientific Bulletin. – 2021. – Т. 18. – С. 233-241.
2. Акбаров Д. Е. и др. Исследования Вопросов Необходимых Условий Крипто Стойкости Алгоритмов Блочного Шифрования С Симметричным Ключом //CENTRALASIANJOURNALOFMATHEMATICALTHEORYANDCOMPUTERSCIENCES. – 2021. – Т. 2. – №. 11. – С. 71-79.
3. ABDULKHAEV Z. E., Sattorov A. M., Shoev M. A. O. Protection of Fergana City from Groundwater //Euro Afro Studies International Journal. – 2021. – Т. 6. – С. 70-81.
4. Abdulkhaev Z. E. et al. Increasing the efficiency of solar collectors installed in the building //" ONLINE-CONFERENCES" PLATFORM. – 2021. – С. 174-177.
5. Abdulkhaev Z. E., Abdurazaqov A. M., Sattorov A. M. Calculation of the Transition Processes in the Pressurized Water Pipes at the Start of the Pump Unit //JournalNX. – 2021. – Т. 7. – №. 05. – С. 285-291.
6. Хусанов Ю. Ю., Таштанов Х. Н. Ў., Сатторов А. М. Машина деталларни пармалаб ишлов бериладиган нотехнологик юзалар турлари //Scientificprogress. – 2021. – Т. 2. – №. 1. – С. 1322-1332.
7. Abdulkhaev Z. E., Madraximov M. M., Sattorov A. M. Calculation Of The Efficiency Of Magnetohydrodynamic Pumps //SCIENTIFIC–TECHNICAL JOURNAL of FerPI. – 2020. – Т. 24. – №. 1. – С. 42-47.
8. Абдулхаев З. Э., Сатторов А. М. Central pump case adjustment by changing the rotation frequency //Актуальные научные исследования в современном мире. – 2020. – №. 6-1. – С. 20-25.
9. Sattorov A. M., Xujaxonov Z. Z. Approach calculation of certain specific integrals by interpolating polynomials //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2019. – Т. 1. – №. 3. – С. 10-12.
10. Fayzullayev J. I., Sattorov A. M. AXBOROT VA PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALAR

INTEGRATSIYASI ASOSIDA TEXNIKA OLIY TA’LIM MUASSASALARI TALABALARINING KASBIY KOMPETENTLIGINI RIVOJLANTIRISH //Scientific progress. – 2021. – T. 2. – №. 7. – С. 330-336.

11. Sattorov A. M., Qo’ziyev S. S. MATEMATIKA FANI O’QITUVCHILARINI TAYYORLASHDA FANLARARO INTEGRATSIYANING ASOSLARI //Scientific progress. – 2021. – T. 2. – №. 7. – С. 322-329.
12. Tojiyev R. et al. DESTRUCTION OF SOIL CRUST BY IMPULSE IMPACT OF SHOCK WAVE AND GAS-DYNAMIC FLOW OF DETONATION PRODUCTS //Innovative Technologica: Methodical Research Journal. – 2021. – T. 2. – №. 11. – С. 106-115.
13. Akbarov D. E. et al. Research on General Mathematical Characteristics of Boolean Functions’ Models and their Logical Operations and Table Replacement in Cryptographic Transformations //CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. – 2021. – T. 2. – №. 11. – С. 36-43.
14. Abduolimova M. Q. J. Q. IKKITA BUZILISH CHIZIG’IGA EGA BO’LGAN GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALA //Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences. – 2021. – T. 1. – №. 10. – С. 392-399.
15. Kosimov K., Mamayusupov J. Transitions melline integral of fractional integrodifferential operators //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2019. – T. 1. – №. 1. – С. 12-15.
16. Abdurazakov A., Mirzamahmudova N., Maxmudova N. “IQTISOD” YO’NALISHI MUTAXASSISLARINI TAYYORLASHDA MATEMATIKA FANINI O’QITISH USLUBIYOTI //Scientific progress. – 2021. – T. 2. – №. 7. – С. 728-736.
17. Qo‘Ziyev S. S., Mamayusupov J. S. UMUMIY O ‘RTA TA’LIM MAKTABLARI UCHUN ELEKTRON DARSLIK YARATISHNING PEDAGOGIK SHARTLARI //Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences. – 2021. – T. 1. – №. 10. – С. 447-453.
18. Qosimova M. Y., Yusupova N. X. On a property of fractional integro-differentiation operators in the kernel of which the meyer function //Scientific-technical journal. – 2020. – T. 24. – №. 4. – С. 48-50.
19. Qosimova M. Y., Yusupova N. X., Qosimova S. T. On the uniqueness of the solution of a two-point second boundary value problem for a second-order simple differential equation solved by the bernoulli equation //ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal. – 2021. – T. 11. – №. 9. – С. 969-973.