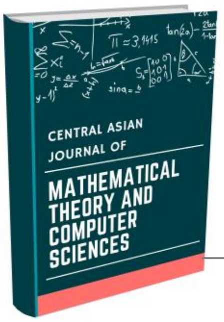

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS

Volume: 02 Issue: 10 | Oct 2021 ISSN: 2660-5309

Смешанная Задача Для Одной Особой Системы Составного Типа С Коэффициентом Чебышева-Эрмита

И.Ф.Сраждинов

Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета

Аннотация:

Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для системы составного типа с коэффициентом Чебышева-Эрмита. Для поставленной задачи найдены условия разрешимости, решение в виде рядов, условия обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость рядов.

ARTICLEINFO

Article history:
Received 30 Aug 2021
Revised form 22 Sep 2021
Accepted 29 Oct 2021

Ключевые слова: составной тип, смешанная задача, полином Чебышева-Эрмита, собственные числа, собственная функция, равномерная сходимость

---***---

Работа посвящена вопросу разрешимости смешанной задачи для одной системы второго поряд- ка составного типа с коэффициентом Чебышева-Эрмита. Об уравнении и полиномах Чебышева-Эрмита см. например [1,стр.306] Системы составного типа со специальными коэффициентами до сих пор почти не исследованы. В данном случае, следуя известной работе В.А. Ильина [2] (см. также [3]), используя метод разделения переменных, доказывается разрешимость смешанной задачи. В [2] исследованы вопросы разрешимости смешанной задачи для гиперболических и параболических уравнений, а также приводятся подробный анализ работ посвященных этой проблеме. Представляет интерес исследования аналогичной проблемы для систем составного типа и особенно для систем составного типа со специальными коэффициентами. Найдены условия обеспечивающие существование и единственность решения. До сих пор для системы уравнений составного типа (в данном случае для эллиптико-гиперболического типа) начальные условия в смешанной задаче задавались, как для отдельных двух уравнений, эллиптическое и гиперболическое (см.[4], а также [5]). Смешанная задача для системы составного типа с коэффициентом Лагранжа исследована в [6]. В настоящей работе, как и в [6], приводятся условия учитывающие взаимосвязь компонентов системы и следовательно отличающееся от предыдущих постановок начальных задач. Найдено явное решение в виде разложения в ряды по полиномам Чебышева-Эрмита. Доказывается равномерная сходимость рядов представляющих решение, а также рядов полученных в результате однократного и двукратного дифференцирования их по t и x. Аналогичные задачи для некоторых систем составного типа рассмотрены в работах [7-11]. Заметим, что в настоящее время проводятся исследования различных свойств одного скалярного уравнения составного типа [12-14]. Пусть $U = U(t,x)$ и $V = V(t,x)$ вещественные функции, переменных t и x. $a \neq 0$-действительное число. Рассмотрим следующую систему второго порядка

$$\begin{cases} U_{tt} + e^{x^2}(e^{-x^2}U'_x)'_x = aV, \\ V_{tt} - e^{x^2}(e^{-x^2}V'_x)'_x = aU. \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Данная система имеет характеристическую форму $\chi(\tau,\xi)=\tau^4-\xi^4$ и поэтому является системой составного типа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ.

Пусть $r=0,1$ и $j=0,1.$

Задача $S_{чэ}(\infty)$.*Найти дважды непрерывно–дифференцируемое по x и t функцию, квадратично-интегрируемое по x с весом* $\rho(x)=e^{-x^2}$ *на промежутке* $(-\infty;+\infty)$ *, удовлетворяющее системе (1) и следующим начальным условиям*

$$\begin{cases} rU(0,x)+(1-r)U'(0,x)=\varphi(x), \\ jV(0,x)+(1-j)V'(0,x)=\psi(x). \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, имеем следующие четыре начальные условия для значений (r,j) : (1,1); (1,0); (0,1); (0,0).

Будем искать решение данной задачи, как мы уже заметили выше, методом разделения переменных.
$U(t,x)=T(t)X(x)$ $V(t,x)=\theta(t)X(x)$, $-\infty<x<+\infty$, $t\geq 0.$ Подставляя в систему, после некоторыхпростых вычислений получаем:

$$\begin{cases} T''-a\theta=\lambda T, \\ \theta''-aT=-\lambda\theta, \\ \dfrac{d}{dx}(e^{-x^2}X')+\lambda e^{-x^2}X=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^{IV}-a(aT-\lambda\theta)=\lambda T'', \\ \theta''-aT=-\lambda\theta, \\ \dfrac{d}{dx}(e^{-x^2}X')+\lambda e^{-x^2}X=0. \end{cases}$$

$$T^{IV}-a^2T+\lambda a\theta=\lambda T'' \Rightarrow T^{IV}-a^2T+\lambda(T''-\lambda T)=\lambda T'' \Rightarrow$$

$$T^{IV}-(a^2+\lambda^2)T=0 \quad (3)$$

Относительно функции $X(x)$ имеем следующую задачу: (см.[1, стр.313]

Найти значения параметра λ *и отвечающие им решения уравнения*

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}\frac{dX}{dx})+\lambda e^{-x^2}X=0 \quad (4)$$

непрерывные и квадратично-интегрируемые с весом $\rho(x)=e^{-x^2}$ *на промежутке* $(-\infty,+\infty)$.

Как известно $[1, стр.313]$ в этом случае:

$$\lambda_n=2n$$

$$X_n(x)=H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (5)$$

$H_n(x)-$ многочлен Чебышева-Эрмита.

Для уравнения (3):

$$k^4-\left(a^2+(2n)^2\right)=0 \Rightarrow \quad k_1(a,n)=\sqrt[4]{a^2+(2n)^2}, \quad k_2=-k_1, \quad k_3=ik_1, \quad k_4=-ik_1; \quad k_1\approx n^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

Учитывая (*) получаем:

$$T(t)=C_1e^{k_1t}+C_2e^{-k_1t}+C_3Cosk_1t+C_4Sink_1t \quad \text{и следовательно,} \qquad (3*)$$

$$\theta(t)=\frac{1}{a}(T''-\lambda T)=\frac{1}{a}\left[(k_1^2-(2n))(C_1e^{k_1t}+C_2e^{-k_1t})-(k_1^2+(2n))(C_3Cosk_1t+C_4Sink_1t)\right]$$

$$T'(t)=k_1(C_1e^{k_1t}-C_2e^{-k_1t})+k_1(C_4Cosk_1t-C_3Sink_1t)$$

$$\theta'(t)=\frac{k_1}{a}\left[(k_1^2-(2n))(C_1e^{k_1t}-C_2e^{-k_1t})+(k_1^2+(2n))(C_3Sink_1t-C_4Cosk_1t)\right]$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} T(0)=C_1+C_2+C_3, \\ \theta(0)=\dfrac{k_1^2-2n}{a}(C_1+C_2)-\dfrac{k_1^2+2n}{a}C_3, \\ T'(0)=k_1(C_1-C_2)+k_1C_4, \\ \theta'(0)=k_1\dfrac{k_1^2-2n}{a}(C_1+C_2)-k_1\dfrac{k_1^2+2n}{a}C_4, \end{cases}$$

Решая эту систему получаем:

$$C_1=\frac{k_1^2+2n}{4k_1^2}\left[T_n(0)+\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{a}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)+\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]$$

$$C_2=\frac{k_1^2+2n}{4k_1^2}\left[T_n(0)-\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{a}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)-\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]$$

$$C_3=\frac{k_1^2-2n}{2k_1^2}T(0)-\frac{a}{2k_1^2}\theta(0) \qquad C_4=\frac{k_1^2-2n}{2k_1^3}T_n'(0)-\frac{a}{2k_1^3}\theta_n'(0).$$

Подставляя полученные выражения в (3*) имеем:

$$T_n(t)=\left[\frac{k_1^2+2n}{4k_1^2}\left[T_n(0)+\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{a}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)+\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]\right]e^{k_1t}+$$
$$+\left\{\frac{k_1^2+2n}{4k_1^2}\left[T_n(0)-\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{a}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)-\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]\right\}e^{-k_{\partial 1}t}+$$
$$+\left[\frac{k_1^2-2n}{2k_1^2}T_n(0)-\frac{a}{2k_1^2}\theta_n(0)\right]Cosk_1t+\left[\frac{k_1^2-2n}{2k_1^2}(\frac{1}{k_1}T_n'(0))-\frac{a}{2k_1^2}(\frac{1}{k_1}\theta_n'(0))\right]Sink_1t$$

$$\theta_n(t)=\left[\frac{k_1^4+4n^2}{4ak_1^2}\left[T_n(0)+\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{k_1^2-2n}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)+\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]\right]e^{k_1t}+$$
$$+\left[\frac{k_1^4+4n^2}{4ak_1^2}\left[T_n(0)-\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{k_1^2-2n}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)-\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]\right]e^{-k_1t}-$$
$$-\left[\frac{k_1^4-4n^2}{2ak_1^2}T_n(0)-\frac{k_1^2+2n}{2ak_1^2}\theta_n(0)\right]Cosk_1t-\left[\frac{k_1^4-4n^2}{2ak_1^2}(\frac{1}{k_1}T_n'(0))-\frac{k_1^2-2n}{2k_1^2}(\frac{1}{k_1}\theta_n'(0))\right]Sink_1t$$

Следовательно, общее решение поставленной задачи будет иметь вид:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)H_n(x);\qquad V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)H_n(x). \tag{6}$$

Предположим, выполненными следующие равенства:

$$\begin{cases} T_n(0)+\dfrac{1}{k_1}T_n'(0)=0,\\ \theta_n(0)+\dfrac{1}{k_1}\theta_n'(0)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Лемма1: ***Из равенств (7) следуют равенства*** $C_1=0$ ***и*** $C_4=-C_3$**.**

Лемма легко доказывается.

Учитывая это имеем:

$$C_2=\frac{k_1^2+\lambda_n^2}{2k_1^2}T_n(0)+\frac{a}{2k_1^2}\theta_n(0)\ \text{и}\ C_4=-C_3.$$

Получаем:

$$T_n(t)=\left\{\left[\left[\frac{k_1^2+\lambda_n^2}{2k_1^2}T_n(0)+\frac{a}{2k_1^2}\theta_n(0)\right]e^{-k_1t}+\left[\frac{k_1^2-\lambda_n^2}{2k_1^2}T_n(0)-\frac{a}{2k_1^2}\theta_n(0)\right]\left(Cosk_1t-Sink_1t\right)\right]\right\} \tag{8}$$

$$\theta_n(t)=\left\{\frac{k_1^4-\lambda_n^4}{2ak_1^2}T_n(0)+\frac{k_1^2-\lambda_n^2}{2k_1^2}\theta_n(0)\right\}e^{-k_1t}-\left\{\frac{k_1^4-\lambda_n^4}{2ak_1^2}T_n(0)-\frac{k_1^2+\lambda_n^2}{2k_1^2}\theta_n(0)\right\}(Cosk_1t-\frac{1}{k_1}Sink_1t)$$

Лемма 2: ***Ограниченное по*** t ***решение системы (1) при*** $t \to \infty$ ***представляется равенствами (6), где*** $T_n(t)$ ***и*** $\theta_n(t)$ ***даны равенствами (8), а*** $H_n(x)$ ***полином Чебышева-Эрмита (*** см.(5)***).***

Заметим, что

$$\theta_n(0) = \frac{1}{\|H_n\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{-\xi^2} H_n(\xi) d\xi; \quad T_n(0) = \frac{1}{\|H_n\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\xi^2} H_n(\xi) d\xi,$$

Для обеспечения абсолютной и равномерной сходимости вышеприведенных рядов следует накладывать на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ соответствующие условия гладкости. Нетрудно заметить, что для этого достаточно доказать сходимость следующего мажорантного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^4 (|C_2| + |C_3|) \tag{8}$$

Как видно выражение (если заметить, что $k_1^4 \sim n^2$) выражение $|C_2| + |C_3|$ должен обеспечивать поведение, как $n^{-3-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ и для этого от функций $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ необходимо потребовать существование непрерывных производных третьего и кусочно-непрерывных производных четвертого порядка. Эти последние условия назовем условиями Δ.

Результат сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема:*Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям Δ. Тогда функции U(t,x) и V(t,x) определяемые равенствами (6) имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, удовлетворяют системе (1), начальным условиям (2) . При этом возможно почленное дифференцирование рядов (6) по x и t два раза и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно*

Данная теорема получена для случая $r = 1$ $j = 1$. Аналогичные результаты можно получить и для случаев $r = 0, j = 1; r = 0, j = 0; r = 1, j = 0$.

Выражаю благодарность академику АН Республики Узбекистан Ш. А. Алимову за полезное обсуждение и ценные замечания.

Литература:

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. Москва, Наука, Гл.ред.физ-мат.литер.,1984г.,384 стр.
2. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. Успехи математических наук,1960,т.XV, вып.2(92),стр.97-154.
3. Алимов Ш.А. Избранные научные труды,2015,Ташкент, Meriyus, 286 стр.
4. Джураев А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. –М., Наука, 1987,415 стр.
5. Сраждинов И.Ф. «О разрешимости смешанных задач для систем составного типа ».Uzbek mathematical journal,2010,N 3,стр.121-130
6. Сраждинов И.Ф. Об одной составной системе с коэффициентом типа Лежандра. Доклады Академии наук Республики Узбекистан, 2016, N5, стр.7-10.
7. Сраждинов И.Ф. Разрешимость начально-краевой задачи для одной системы составного типа. Москва.2020.Межвуз.науч.конгресс. Изд-во Инфинити. Том 2. стр.145-152. DOI 37.10.34660 / INF.2019.62.47001.

8. Сраждинов И.Ф. Начально-краевая задача для одной системы составного типа.Central Asian journal of mathematical theory and computer sciences.http://centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS. 02 issue:03. March 2021. ISSN2660-5309.стр.41-47.

9. Сраждинов И.Ф To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Composite Type CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES. Volume : 02 Issue: 04 | April 2021 ISSN: 2660-5317.стр.23-32.

10. Сраждинов И.Ф. О разрешимости смешанной задачи для систем составного типа.; -Мин. Выс. И Ср. сп. обр. РУзб, Нац. Унив. Узбекистана, Институт математики им. В.И .Романовского АН РУз. Тезисы докладов респ. науч. конф. с участием зарубежных ученых. ”Современные методы математической физики и их приложения”. 17-18 ноября 2020г.Ташкент,I том,стр.263-274.

11. Сраждинов И.Ф. Смешанная задача для одной системы составного типа. -Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари.// Республика илмий анжуман материаллари тўплами.- Тошкент. ТДТУ, 1-2 июнь 2021.- 470 б. (стр.362-372)

12. Хашимов А.Р. Нелокальная задача для для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием.- Вест. Сам. Техн. Ун-та, Сер. Физ – мат .наук,№1(24), 2020.стр.187-198.

13. Зикиров О.С. О некоторых задачах для уравнений составного типа.- Сборник “Обратные и некорректные задачи матем.физики” посвящ.80-летию со дня рожд. Акад. М. М. Лаврентьева, Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012г.

14. Муминов Ф.М, Миратоев З.М., Утабов У.А. Об одной краевой задаче для уравнения составного типа третьего порядка- CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES, Volume 2, ISSUE4, апрель 2021,ISSN:2660-5317,стр.17-22